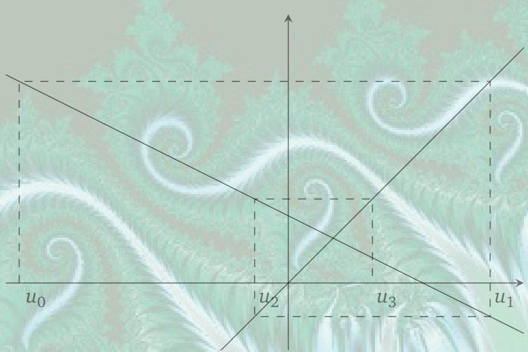
الأستاذ بحار عاشور

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

البحّار في المتتاليات العددية

3 AS

الشعب : رياضيات
تقني رياضي
علوم تجريبية



- درس شامل في المتتاليات العددية مدعم بتطبيقات محلولة لكل عنصر
- الحلول المفصلة للتمارين الواردة في البكالوريا للشعب العلمية لآخر 10 سنوات "2014-2024"

الفهرس

مقدمـــــــــــــــــــــــة

الحمد لله الذي علم بالقلم، و الصلاة و السلام على خير المعلمين سيدنا محمد صلى الله عليه و على آله الطيبين و بعد :

بدأت المتتاليات العددية رحلتها التاريخية منذ أن لجأ الإنسان إلى طرق الحساب التكرارية و هذا يعود إلى زمن أرخميدس على الأقل، الذي إستخدمها في حساب المساحات و الحجوم و في نفس هذه الفترة بدأت تظهر بذور مفهوم البرهان بالتراجع. في رحلتنا في هذا الكتاب أسألك أن نبحر معا في عالم ساحر من الأرقام المترابطة، عالم المتتاليات العددية، أطلب الإذن بالصحبة.

هذا الكتاب هو بوابتك للنجاح في إمتحان البكالوريا، ستتعرف فيه على مفهوم المتتالية العددية، طرق توليدها (تعريفها)، أنواعها المختلفة، كيفية إيجاد حدودها، حساب نهايتها، إستنتاج تقاربها، دراسة إتجاه تغيرها، حساب مجموع حدودها و ستتعلم كيفية إثبات خواصها بإستخدام أسلوب البرهان بالتراجع، ستجد في هذا الكتاب الدرس المفصل الشامل و المزود بالأمثلة المتنوعة ، بالإضافة إلى مجموعة شاملة من تمارين المتتاليات العددية المستوحاة من مواضيع إمتحانات البكالوريا للسنوات العشر الأخيرة (2014-2024)، شاملا جميع الشعب العلمية (رياضيات -تقني رياضي-علوم تجريبية)، تمكنك من فهم طبيعة الأسئلة التي ترد في إمتحانات البكالوريا و كيفية الإجابة عليها بشكل صحيح ، و كذلك تطبيق المفاهيم النظرية على مسائل واقعية مما يهيئك بجدارة للبكالوريا .

أسأل الله عز و جل أن يوفقكم و يجعل النجاح حليفنا و الله الموفق و المستعان .

بحار عاشور

1 ملخص شامل للدرس

1 المتتاليات العددية

تعريف

نسمي متتالية عددية حقيقية u كل دالة عددية ترفق بكل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ العدد الحقيقي $u(n)$ (n_0 عدد طبيعي معطى).

ترميز

1- نرمز لصورة n بالمتتالية u بـ u_n بدل $u(n)$ ، هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل.

2- المتتالية u يرمز لها بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر أو يساوي n_0 .

3- المتتالية u يرمز لها بـ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

4- u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية u.

5- u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

توليد متتالية

يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها

يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت :

1- متتالية عددية معرفة بحدها العام $u_n = f(n)$

مثلا: من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = 2n + 1$ ، و للحصول على حد معين يكفي تعويض n بالعدد الطبيعي المناسب. لدينا:

$$u_{16} = 2 \times 16 + 1 = 33 \quad \text{و} \quad u_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$$

2- متتالية عددية معرفة بعلاقة تراجعية $v_{n+1} = f(v_n)$

مثلا: من أجل كل عدد طبيعي n: $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$

العلاقة بين رتبة حد و دليله في متتالية

في المتتالية (u_n) :

u_{16} هو أحد **حدودها** ، 16 هو **دليله** (دليل الحد) أما **رتبته** فهي متعلقة بعدد الحدود التي تسبقه.

- رتبة الحد u_{16} بالنسبة للحد u_0 هي 16-1+0 أي 17 .
- رتبة الحد u_{16} بالنسبة إلى الحد u_1 هي 16-1+1 أي 16 .
- رتبة الحد u_k بالنسبة إلى الحد u_b حيث $b < k$ هي $k - b + 1$.

2 إتجاه تغير متتالية

-لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ **متتالية عددية:**

- تكون (u_n) متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} \geq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1} > u_n$)
- تكون (u_n) متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} \leq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1} < u_n$)
- تكون (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} = u_n$.

تنبيه: إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أنّها رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب).

طرق لدراسة إتجاه تغير متتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

الطريقة 1: من أجل كل عدد طبيعي n

1- إذا كانت $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

2- إذا كانت $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3- إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

الطريقة 2: إذا كانت (u_n) معرفة كمايلي: $u_n = f(n)$ ، حيث f معرفة على المجال $[0, +\infty[$

1- إذا كانت f متزايدة على المجال $[0, +\infty[$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

2- إذا كانت f متناقصة على المجال $[0, +\infty[$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3- إذا كانت f ثابتة على المجال $[0, +\infty[$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

تنبيه: العكس غير صحيح.

الطريقة 3: في حالة ما إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماما:

1- إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

2- إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3- إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

تطبيق 1

أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

(1 $u_n = (n+1)^2$ ، **(2** $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

الحل

(1 لدينا في الحالة لما $u_n = (n+1)^2$ نستعمل الطريقة 2 ، لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x+1)^2$ ، و كون مشتقتها $f'(x) = 2(x+1)$ فإن $f'(x) > 0$ على المجال $]-1, +\infty[$ بالخصوص على المجال $[0, +\infty[$. إذن نستنتج أن f متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$. فالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(2 لدينا في الحالة لما $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ نلاحظ أن جميع حدود المتتالية موجبة تماما و بإستعمال الطريقة 3 لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ أو $u_{n+1} < u_n$. إذن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

3 متتالية محدودة من الاعلى،محدودة من الأسفل،متتالية محدودة

(u_n) متتالية عددية معرفة $\mathbb{N}$:

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي M حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq M$. نقول أن M عنصر حاد من الأعلى .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي m حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq m$. نقول أن M عنصر حاد من الأسفل .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

طريقة

(u_n) متتالية عددية معرفة $\mathbb{N}$:
لإثبات أن (u_n) متتالية محدودة من الأعلى بعدد حقيقي M (أو من الأسفل بعدد حقيقي m) نتبع إحدى الطرق التالية :

✓ المقارنة بين u_n و M (أو بين u_n و m) و ذلك بدراسة إشارة $u_n - M$ (أو إشارة $u_n - m$)

✓ إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$.

✓ إستعمال الإستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq M$ (أو $u_n \geq m$) " سنتعرف عليه فيما بعد "

تطبيق 2

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+4}$.

- أحسب الفرق $u_n - 2$ ثم إستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى .

الحل

لدينا :

$$u_n - 2 = \frac{2n^2+1}{n^2+4} - 2 = \frac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4} = \frac{-7}{n^2+4}$$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{-7}{n^2+4} < 0$.
و بالتالي ، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 2 < 0$. أي أنّ $u_n < 2$.

نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 .

4 تقارب و تباعد متتالية عددية

تعاريـــف

(u_n) متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي .

1- نقول أن المتتالية (u_n) تقبل ℓ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) إبتداء من رتبة معينة ، و نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]\alpha;+\infty[$ ، $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة ، و نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة .

3- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty;\alpha[$ ، $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة ، و نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة .

مبرهنة

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

ملاحظة

1- المبرهنة السابقة لا تعطي نهاية المتتالية ، إنّما تثبت فقط وجود هذه النهاية .

مثلا: عندما تكون متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بعدد M ، تكون متقاربة . و لكن نهايتها ℓ ليست بالضرورة مساوية للعدد M ، بل $\ell \leq M$.

2- نعتبر f دالة عددية معرفة على المجال $[0;+\infty[$ و (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_n = f(n)$.

- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

تطبيق 3

حسب نهاية المتتالية (u_n) ثم استنتج :

❶ $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$ ، ❷ $u_n = \ln\left(e^2 + \dfrac{1}{e^n}\right)$ ، ❸ $u_n = \sqrt{4n^2-1} - 2n$ ، ❹ $u_n = n + \dfrac{e^n}{n}$

الحل

❶ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n} = 2$ ، نستنتج أنّ (u_n) متقاربة .

❷ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(e^2 + \dfrac{1}{e^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(e^2\right) = 2\ln e = 2$ ، نستنتج أنّ (u_n) متقاربة .

❸ لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2-1} - 2n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2-1} - 2n\right)\left(\sqrt{4n^2-1} + 2n\right)}{\sqrt{4n^2-1} + 2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2 - 1 - 4n^2}{\sqrt{4n^2-1} + 2n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{4n^2-1} + 2n} = 0$$

نستنتج أنّ (u_n) متقاربة .

❹ $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n + \frac{e^{-n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(n^2 + e^{-n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} n^2 = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

نستنتج أنّ (u_n) متباعدة .

5 المتتالية الحسابية

تعريف

• نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها r إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = u_n + r$

• إذن في متتالية حسابية ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بإضافة العدد الحقيقي نفسه r

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} u_n$$

طريقة

للبرهان على أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يمكن البرهان على أن الفرق بين حدين متتابعين كيفيين عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساس المتتالية .

تطبيق 4

فيما يلي بين إذا ما كانت المتتالية (u_n) حسابية أم لا :

❶ $u_n = 3n - 1$ ، ❷ $u_n = \frac{1}{2} - 3n$ ، ❸ $u_{n+2} = \frac{3-4n}{5}$ ، ❹ $u_n = 2n^2 + 3n$

الحل

❶ لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = 3\left(n+1\right) - 1 - 3n + 1 = 3n + 3 - 3n = 3$$

و منه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$.

❷ لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} - 3\left(n+1\right) - \frac{1}{2} + 3n = -3n - 3 + 3n = -3$$

و منه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$.

❸ لدينا :

$$u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{3 - 4\left(n+1\right)}{5} - \frac{3-4n}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}n - \frac{4}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5}n = -\frac{4}{5}$$

و منه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\frac{4}{5}$ و حدها الأول $u_2=\frac{3}{5}$.

❹ لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=2(n+1)^2+3\,(n+1)-2n^2-3n=2+4n+3=4n+5$$

الفرق غير ثابت و منه المتتالية (u_n) ليست حسابية .

الحد العام لمتتالية حسابية بدلالة الحد الأول

- إذا كان u_0 هو الحد الأول للمتتالية (u_n) فإن : $u_n=u_0+nr$.
- إذا كان u_1 هو الحد الأول للمتتالية (u_n) فإن : $u_n=u_1+(n-1)\,r$.
- **بصفة عامة :** $u_n=u_p+(n-p)\,r$ حيث p عدد طبيعي .

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend right, "+r"'] \arrow[rrrr, bend right, "+nr"'] & u_1 \arrow[r, bend right, "+r"'] & u_2 \arrow[r, bend right, "+r"'] & \cdots \arrow[r, bend right, "+r"'] & u_n \end{tikzcd}$$

أمثلة

- المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=-1$ و $u_{15}=59$ ، أساسها هو $r=4$
لأن: $u_{15}=u_0+15r$ و منه $r=\frac{u_{15}-u_0}{15}=4$ و حدها العام هو : $u_n=u_0+nr=4n-1$.
- المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة بالأساس $r=-3$ و $u_{15}=32$ ، حدها العام هو :

$$u_n=u_{15}+(n-15)\times(-3)=32-3n++45=-3n+77$$

الوسط الحسابي

إذا كانت a ، b و c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن :

$a+c=2b$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend right, "+r"'] & b \arrow[r, bend right, "+r"'] & c \end{tikzcd}$$

إتجاه تغير متتالية حسابية

إتجاه تغير متتالية حسابية يتعلّق بإشارة الأساس r لأنَّ $(u_{n+1} - u_n = r)$.

1- إذا كان r سالبا تماما $(r < 0)$ فإن المتتالية متناقصة تماما .

2- إذا كان r موجبا تماما $(r < 0)$ فإن المتتالية متزايدة تماما .

3- إذا كان r معدوما $(r = 0)$ فإن المتتالية ثابتة .

مجموع الحدود

مجموع حدود متتالية حسابية يعطى بالعلاقة التالية : $S_n = (\text{عدد الحدود}) \times \dfrac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$

حيث : عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

أمثلة

لدينا : • $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = n\left(\dfrac{u_1 + u_n}{2}\right)$

• $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$

بصفة عامة • $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$

تطبيق 5

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -1$ و بالعلاقة : $u_{n+1} = u_n - 3n + 1$

و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1- أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r و حدها الأول v_0 .

2- أوجد عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

3- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

الحل

1. إثبات أن (v_n) متتالية حسابية : لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - 3(n+1) + 1 - (u_n - 3n + 1) \\ &= u_{n+1} - 3n - 3 + 1 + u_n + 3n - 1 \\ &= u_{n+1} + u_n - 3 \\ &= v_n - 3 \end{aligned}$$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$ و حدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

2. إيجاد عبارة الحد العام :

لدينا : $v_n = v_0 + nr$ و منه $v_n = 1 - 3n$.

3. حساب المجموع S_n :

لدينا : $S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}_{n \text{ حد}}$ و منه : $S_n = n \times \dfrac{(v_0 + v_{n-1})}{2}$

حيث $v_{n-1} = 1 - 3(n-1) = 4 - 3n$ إذن : $S_n = n\dfrac{(1+4-3n)}{2} = \dfrac{n(5-3n)}{2}$

6 المتتالية الهندسية

تعريف

- نقول أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها q $(q \in \mathbb{R}^*)$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = v_n \times q$
- إذن في متتالية هندسية ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بالضرب بالعدد الحقيقي نفسه q

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} v_n$$

طريقة

للبرهان على أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يكفي إثبات أن النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو q أساس المتتالية .

تطبيق 6

فيما يلي بين إذا ما كانت المتتالية (u_n) هندسية أم لا :

❶ $u_n = -5\times 3^n$ ، ❷ $u_n = \dfrac{1}{2^n-1}$ ، ❸ $u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$ ، ❹ $u_n = \sqrt{2^n}$

الحل

❶ لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-5\times 3^{n+1}}{-5\times 3^n} = \frac{3^n\times 3}{3^n} = 3$$

و منه المتتالية (u_n) هندسية و أساسها $q=3$.

❷ لدينا النسبة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}-1}}{\frac{1}{2^n-1}} = \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$$

ليست عدد ثابت و منه المتتالية (u_n) ليست هندسية .

❸ لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{4^n}{3^{n+1}}} = \frac{\frac{4}{3^2}\times\frac{4^n}{3^n}}{\frac{1}{3}\times\frac{4^n}{3^n}} = \frac{4\times 3}{3^2} = \frac{4}{3}$$

و منه المتتالية (u_n) هندسية و أساسها $q=\dfrac{4}{3}$.

❹ لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2\times 2^n}}{\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{2}$$

و منه المتتالية (u_n) هندسية و أساسها $q=\sqrt{2}$.

الحد العام لمتتالية هندسية بدلالة الحد الأول

- إذا كان u_0 هو الحد الأول للمتتالية (u_n) فإن : $u_n = u_0 \times q^n$.
- إذا كان u_1 هو الحد الأول للمتتالية (u_n) فإن : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- **بصفة عامة :** $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حيث p عدد طبيعي .

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend right, "\times q"'] \arrow[rrrr, bend right=40, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend right, "\times q"'] & u_2 \arrow[r, bend right, "\times q"'] & \cdots \arrow[r, bend right, "\times q"'] & u_n \end{tikzcd}$$

أمثلة

- المتتالية الهندسية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = -3$ و $u_3 = -192$ ، أساسها هو $q = 4$

لأن: $u_3 = u_0 \times q^3$ و منه $q = \sqrt[3]{\dfrac{u_3}{u_0}} = \sqrt[3]{\dfrac{-192}{-3}} = 4$ و حدها العام هو : $u_n = u_0 \times q^n = -3 \times 4^n$.

- المتتالية الهندسية (u_n) المعرفة بالأساس $q = \dfrac{1}{2}$ و $u_5 = 88$ ، حدها العام هو :

$$u_n = u_5 \times q^{n-5} = 88 \times 2^n \times 2^{-5} = \frac{88}{2^5} \times 2^n = \frac{11}{4} \times 2^n$$

الوسط الهندسي

إذا كانت a ، b و c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن :
$a \times c = b^2$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend right, "\times q"'] & b \arrow[r, bend right, "\times q"'] & c \end{tikzcd}$$

إتجاه تغير متتالية هندسية

إتجاه تغير متتالية هندسية يتعلّق بإشارة u_0 و q لأنَّ :

$$u_{n+1} - u_n = q \times u_n - u_n = u_n(q-1) = u_0 \times q^n (q-1)$$

1- إذا كان q سالبا تماما $(q < 0)$ فإن المتتالية غير رتيبة .

-2 إذا كان $0 < q < 1$ فإن
- لما : $u_0 < 0$ فإن المتتالية متزايدة تماما .
- لما : $u_0 < 0$ فإن المتتالية متناقصة تماما .

-3 إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة .

-4 إذا كان $q > 1$ فإن
- لما : $u_0 < 0$ فإن المتتالية متناقصة تماما .
- لما : $u_0 < 0$ فإن المتتالية متزايدة تماما .

مجموع الحدود

مجموع حدود متتالية هندسية يعطى بالعلاقة التالية :
$$S_n = \text{الحد الأول} \times \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}\right)$$

حيث : عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

أمثلة

لدينا :

- $$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_1 \times \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$
- $$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)$$

بصفة عامة
- $$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}\right)$$

تقارب و تباعد متتالية هندسية

❶ إذا كان $\begin{cases} q > 1 \\ u_0 > 0 \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذن المتتالية (u_n) متباعدة.

❷ إذا كان $\begin{cases} q > 1 \\ u_0 < 0 \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ إذن المتتالية (u_n) متباعدة.

❸ إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

❹ إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

تطبيق 7

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 14$ و بالعلاقة $u_{n+1} = 4u_n + 3$

و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + 1$

1- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

2- أوجد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

الحل

.1 إثبات أن (v_n) متتالية هندسية : لدينا $v_n = u_n + 1$ و منه :

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 = 4u_n + 3 + 1 = 4u_n + 4 \\
&= 4\left(u_n + 1\right) = 4v_n
\end{aligned}
$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 15$.

• بما أن $\begin{cases} q = 4 > 1 \\ v_0 > 0 \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ إذن المتتالية (v_n) متباعدة.

.2 إيجاد عبارة الحد العام v_n بدلالة n

لدينا $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = 15 \times 4^n$

و لدينا $v_n = u_n + 1$ و منه : $u_n = v_n - 1$ إذن : $u_n = 15 \times 4^n - 1$

.3 حساب بدلالة n المجموع : S_n

لدينا : $S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{n+1 \text{ حد}}$ و منه : $S_n = v_0 \times \left(\dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)$ و منه : $S_n = 15 \times \left(\dfrac{4^{n+1} - 1}{3}\right)$

إذن : $S_n = 5 \times \left(4^{n+1} - 1\right)$

تطبيق 8

(v_n) متتالية هندسية حيث $v_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (الأساس $q = \frac{1}{3}$ و الحد الأول $v_0 = 2$)

و لتكن المتتالية (w_n) حيث $v_n = w_n + a$ (مع a عدد حقيقي غير معدوم)

- احسب المجاميع و الجداءات التالية :

❶ $S_1 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

❷ $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2n}$

❸ $S_3 = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

❹ $S_4 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}$

❺ $S_5 = v_0 + v_2 + \cdots + v_{2n}$

❻ $S_6 = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$

❼ $S_7 = \ln v_0 + \ln v_2 + \cdots + \ln v_n$

الحل

❶ $S_1 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 2$ إذن :

$$S_1 = v_0 \times \left(\frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1}\right) = 2 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right) = 2 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{2}{3}}\right) = -3\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$

❷ $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2n}$

S_2 عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول v_0 و لكن الإختلاف مع S_1 يكمن في عدد الحدود فقط إذن :

$$S_2 = v_0 \times \left(\frac{q^{2n-0+1} - 1}{q - 1}\right) = 2 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right) 2 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} - 1}{-\frac{2}{3}}\right) = -3\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} - 1\right)$$

❸ $S_3 = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

المتتالية (w_n) لا حسابية و لا هندسية و لكنها مكتوبة بدلالة المتتالية الهندسية (v_n) حيث $w_n = v_n - a$

نكتب كل حدود المتتالية (w_n) بدلالة حدود المتتالية (v_n) فيصبح لدينا :

$$\begin{aligned}S_3 &= v_0 - a + v_2 - a + \cdots + v_n - a\\ &= \underbrace{v_0 + v_2 + \cdots + v_n}_{S_2} \underbrace{-a - a - \cdots - a}_{n+1\text{مرة}}\\ &= S_2 - (n+1)\,a\end{aligned}$$

لاحظ أن هناك $n+1$ حد من الأعداد $-a$ لأن كل حد من حدود المتتالية (v_n) يرافقه عدد $-a$.

❹ $S_4 = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{v_1} + \cdots + \dfrac{1}{v_n}$

لدينا : $\dfrac{1}{2} \times 3^n = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = \dfrac{1}{v_n}$ و منه $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $\dfrac{1}{v_0} = \dfrac{1}{2}$

و بالتالي :

$$S_4 = \frac{1}{v_0}\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{-2}\right) = \frac{1}{4}\left(3^{n+1}-1\right)$$

❺ $S_5 = v_0 + v_2 + \cdots + v_{2n}$

نضع $p_n = v_{2n}$ إذن $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{v_{2(n+1)}}{v_{2n}} = \dfrac{v_{2n+2}}{v_{2n}} = \dfrac{v_0 \times q^{2n+2}}{v_0 \times q^{2n}} = \dfrac{q^{2n} \times q^2}{q^{2n}} = q^2$

و منه (p_n) هندسية أساسها q^2 وحدها الأول v_0 و بالتالي :

$$\begin{aligned}S_5 &= v_0 + v_2 + \cdots + v_{2n}\\ &= p_0 + p_1 + \cdots + p_n\\ &= v_0\left(\frac{1-(q^2)^{n-0+1}}{1-q^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-9^{n+1}}{1-9}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-9^{n+1}}{-8}\right) = \frac{1}{16}\left(9^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

❻ $S_6 = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة q و v_0 $\left(v_n = v_0 \times q^n\right)$ و نعوض في S_6 فنجد :

$$S_6 = v_0 \times v_0 \times q^1 \times \cdots \times v_0 \times q^n$$

$$= \underbrace{v_0 \times v_0 \times \cdots \times v_0}_{n+1} \times q^1 \times q^2 \times \cdots \times q^n = {v_0}^{n+1} \times q^{\overbrace{1+2+\cdots+n}^{T_n}}$$

نلاحظ أن T_n هو مجموع لمتتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 أي : $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

و منه : $S_6 = {v_0}^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n+1} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

❼ $S_7 = \ln v_0 + \ln v_2 + \cdots + \ln v_n$

باستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نجد :

$$S_7 = \ln v_0 + \ln v_2 + \cdots + \ln v_n = \ln\left(v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n\right) = \ln S_6$$

و منه :

$$S_7 = \ln\left(2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \ln 2^{n+1} + \ln\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n+1)\ln 2 + \frac{n(n+1)}{2}\ln\frac{1}{3}$$

7 المتتاليتان المتجاورتان

تعريف

تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

مبرهنة

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تطبيق 9

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي : $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} .$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1- أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
عين عبارة w_n بدلالة n . ما هي نهاية (w_n) ؟

2- أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ماهي نهاية (t_n) ؟

3- أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4- استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

الحل

1. إثبات أن المتتالية (w_n) هندسية : لدينا

$$\begin{aligned} w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} \\ &= \frac{u_n - v_n}{12} = \frac{w_n}{12} \end{aligned}$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 11$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$ و بما أن $-1 < q < 1$ فإن (w_n) متقاربة و $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

2. إثبات أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة : لدينا

$$\begin{aligned} t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} &= \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} \\ &= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n \end{aligned}$$

و منه المتتالية (t_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

.3 <u>إثبات أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان :</u> • لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} \\ &= \frac{-2\left(u_n - v_n\right)}{3} = -\frac{2}{3}w_n = -\frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n < 0 \end{aligned}$$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

• لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} \\ &= \frac{(u_n - v_n)}{4} = \frac{1}{4}w_n = \frac{11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0 \end{aligned}$$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n > 0$ إذن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• و نعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ و كون أن : $w_n = u_n - v_n$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. إذن المتتاليان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

.4 <u>استنتاج نهاية u_n و نهاية v_n:</u> المتتاليان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

إذن المتتاليان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية ℓ ، و نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 44$

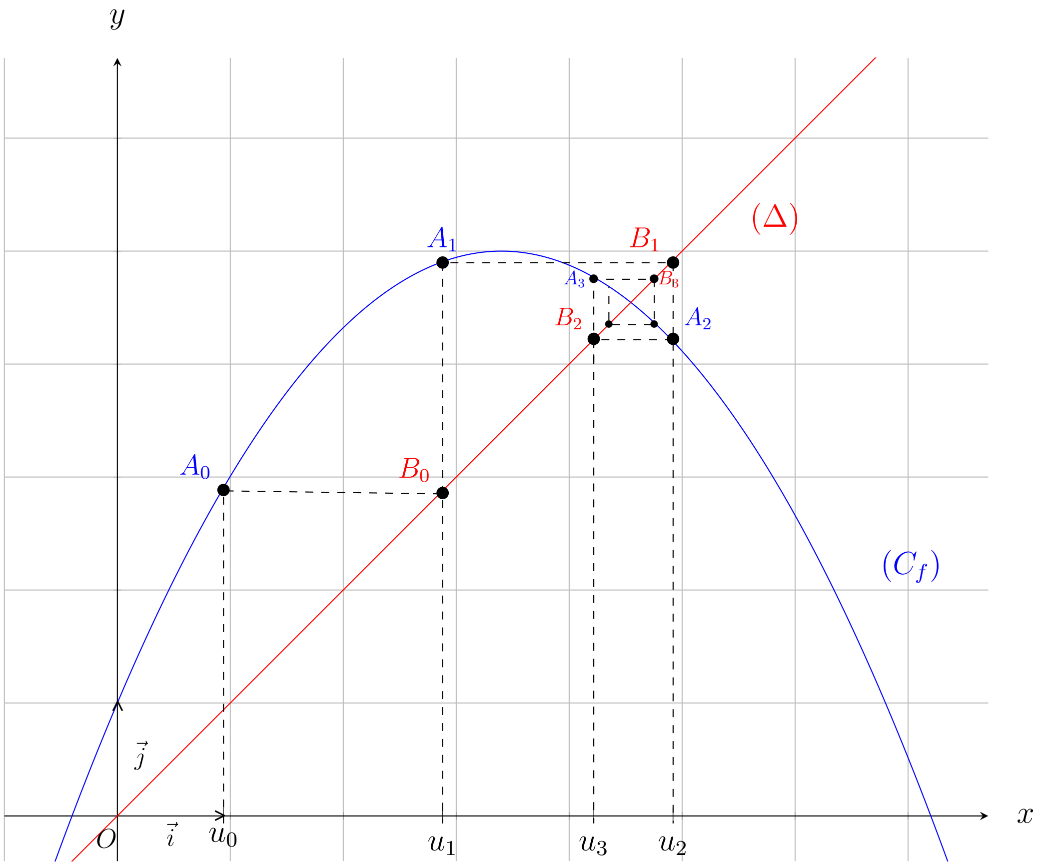
و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 44$ إذن $3\ell + 8\ell = 44$ و بالتالي : $\ell = 4$.

8 التمثيل البياني لمتتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

في معلم للمستوي يتم تمثيل حدود المتتالية (u_n) كالآتي :

- ننشئ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
- ننشئ الحد الأول u_0 على محور الفواصل .
- ننشئ النقطة A_0 على المنحنى (C_f) ذات الفاصلة u_0 .
- ننشئ النقطة B_0 على المستقيم (Δ) ذات نفس ترتيبة النقطة A_0 .
- ننشئ على محور الفواصل u_1 فاصلة النقطة B_0 .
- بنفس الطريقة نعيدالعمل بدءا من u_1 لإنشاء u_2 و هكذا لإنشاء u_3 ، u_4 ، ...

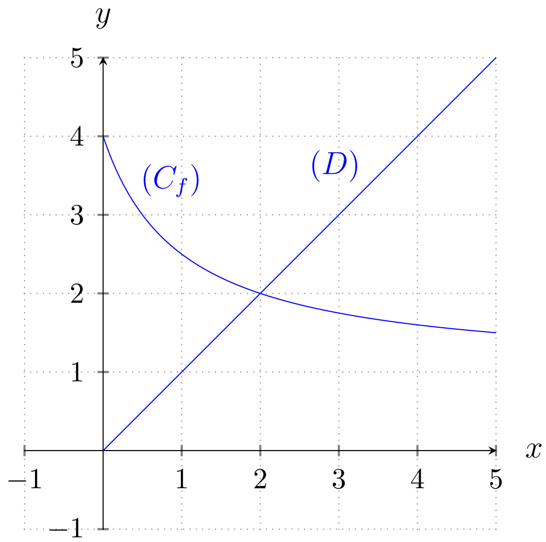
أنظر الشكل الموالي (الشكل 1)



الشكـــل 1

تطبيق 10

باك 2023 شعبة رياضيات



1. f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ :

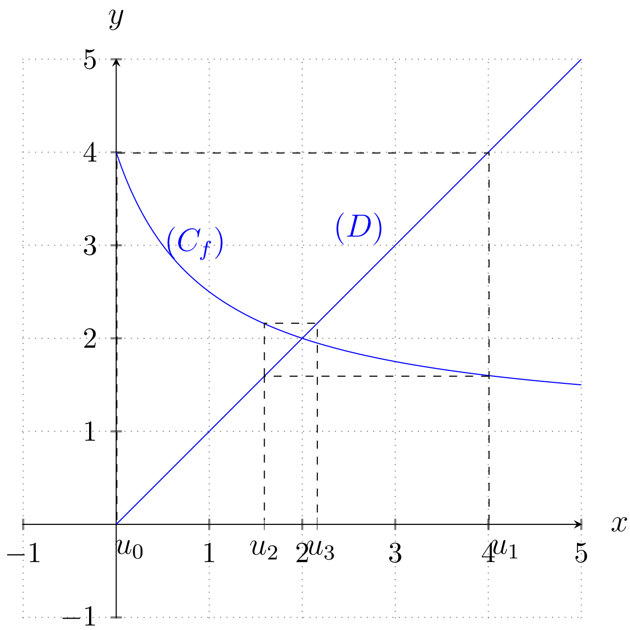
$u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

الحل

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :



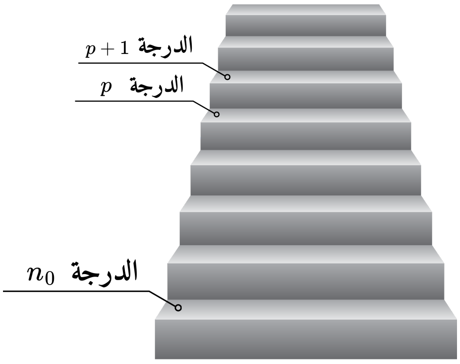
ب) تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها :

المتتالية (u_n) ليست رتيبة و هي تتقارب نحو العدد 2 .

9 الاستدلال بالتراجع (البرهان بالتراجع)

مبدأ الإستدلال بالتراجع

تخيل أنَّ لدينا سلَّم. مبدأ الإستدلال بالتراجع ينص على أنّه كي تتمكن من صعود السُّلّم والوصول إلى أية درجة دليلها n تحقق $n \geq n_0$ يكفي أن تتمكن من الصعود إلى الدرجة الإبتدائية التي دليلها n_0 وأن يكون بإمكانك الصعود من أية درجة دليلها p إلى الدرجة التي دليلها $p+1$ التي تعلوها مباشرة.



مبرهنة

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1- التأكد من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2- نفرض أن الخاصية محققة من أجل عدد طبيعي كيفي n $(n \geq n_0)$ أي $P(n)$ (فرضية التراجع) و نبرهن الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

ملاحظة

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن : $n_0 = 0$ ، إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $n_0 = 1$ ، و هكذا...
- يمكن التفكير في إستعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية . **مثلا :** إثبات أن متتالية محدودة من الأعلى أو من الأسفل .

تطبيق 11

برهن بالتراجع صحة القضايا التالية ، من أجل كل عدد طبيعي n :

❶ $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ ، ❷ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ، ❸ $2^n \geq n+1$

الحل

❶ نضع $P(n):1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$

- من أجل $n=0$ لدينا : $0=0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n):1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ صحيحة،

و نثبت أن $P(n+1):1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2}$ صحيحة .

لدينا :

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n\,(n+1)}{2}+(n+1)\\&=\frac{n\,(n+1)+2\,(n+1)}{2}=\frac{(n+2)\,(n+1)}{2}\end{aligned}$$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

❷ نضع $P(n):1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

- من أجل $n=0$ لدينا : $0=0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n):1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ صحيحة،

و نثبت أن $P(n+1):1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ صحيحة .

لدينا :

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\\&=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2\,(n^2+4n+4)}{4}\\&=\frac{(n+1)^2\,(n^2+2\times 2n+2^2)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

❸ نضع $P(n): 2^n \geq n+1$

- من أجل $n=0$ لدينا : $2^0 \geq 1$ أي : $1 \geq 1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n): 2^n \geq n+1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1): 2^{n+1} \geq n+2$ صحيحة .

من فرضية التراجع لدينا : $2^n \geq n+1$ و منه : $2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2^n + 2^n \geq 2^n + (n+1)$

و بما أن : $n \in \mathbb{N}$ فإن : $n \geq 0$ و بالتالي : $2^n \geq 2^0 = 1$

و منه نستنتج أن : $2^{n+1} \geq 2^n + (n+1) \geq 1 + (n+1) = n+2$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2 التمارين

1 -بكالوريات سابقة-شعبة علوم تجريبية

التمرين 1

دورة 2014 -م1-

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$

1- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

5- لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب : $\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 2

دورة 2014 -م2-

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2- أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln u_n$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

1- عبّر عن v_n بدلالة n، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

2- أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n)$

ب- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حيث : $P_n + 4n > 0$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 3

دورة 2015 -م1-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (1 + u_n) e^{-2} - 1$.

1- أحسب : u_1 ، u_2 و u_3.

2- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$.

3- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.هل هي متقاربة؟علل.

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n+1)(-n + 2 + \ln 3)$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 4

دورة 2015 -م2-

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1- عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

2- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x$.

3- مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1- أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ، v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها .

ب) خمّن اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

2- أ) أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3- أ) أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$

ب) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0<v_n-u_n\leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ج) استنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ، ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 5

دورة 2016 -المسرب م1-

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y=x$ معادلة له .

3- أرسم (C) و (Δ) .

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1- مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0،u_1،u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

2- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n<4$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\leq\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 6

دورة 2016 -المسرب م2-

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$.

1- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 3$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2- (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول .

ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_n}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 7

دورة 2016 -م1-

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ: $f(x)=\frac{13x}{9x+13}$

1- أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى المجال I .

2- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n\leq 4$

ب) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

4- لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

أ) - برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها و حدّها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n .

ج) استنتج أن : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 8

دورة 2016 -م2-

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

1- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0.

2- أ) عبّر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n .

ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

ب) تحقق أنّ: $\frac{1}{3}(1-v_n) = \frac{1}{u_n+2}$ وذلك من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ج) استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 9

الدورة العادية 2017 -م1-

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1- أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة.

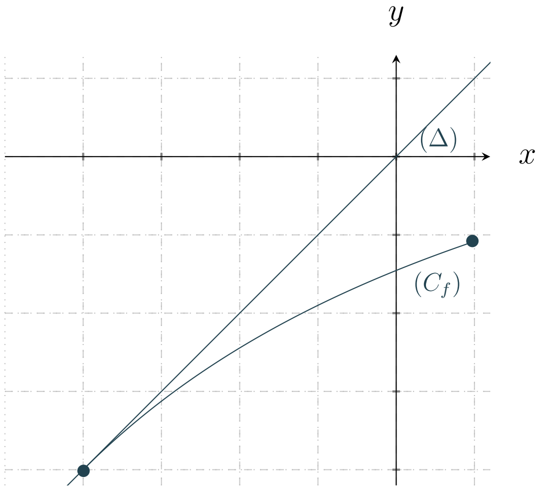
2- أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n.

ب) أثبت أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 10

الدورة العادية 2017 -م2-



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ و f الدالة المعرّفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$.

و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

I) تحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

ثم بين أنّ : من أجل $x \in [-4;1]$ فإن $f(x) \in [-4;1]$

II) (u_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$

ثم بين أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث :

$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \cdots + v_{2016} \times u_{2016}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 11

الدورة الاستثنائية 2017 -م1-

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1- أحسب الحدين u_1 و v_1.

2- أ) أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

ب) باستعمال البرهان بالتراجع بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3- نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$.

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n.

4- بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 12

الدورة الاستثنائية 2017 -م2-

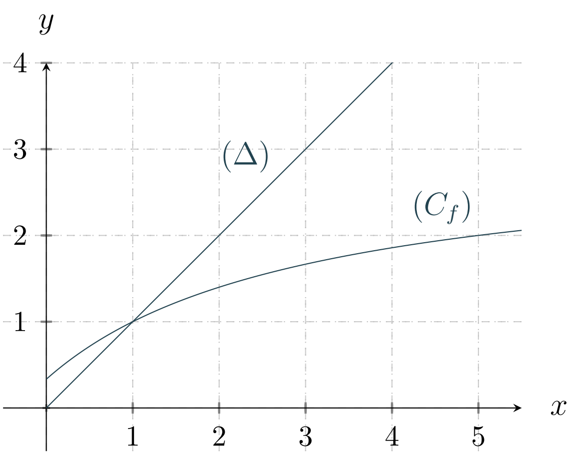
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

I) عين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$



1- أ) أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \dfrac{1}{u_n+1} + \dfrac{1}{u_{n+1}+1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 13

دورة 2018 -م1-

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n+5}$.

1- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب) بيّن أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$

أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3- عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{1}{3}(1-n^2) = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 14

دورة 2018 -م2-

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1- أحسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 .

بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{2n+3}{2n+1} > 1$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

2- (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n+1$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أحسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n = \ln\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)$

و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \cdots + e^{u_{2018}}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 15

دورة 2019 -م1-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

1- أ) برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة.

2- (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

3- أكتب v_n بدلالة n ثم بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

أحسب عندئذ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4- بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 16

دورة 2019 -م2-

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]4;7[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

1- أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$.

ب) استنتج أنّه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فإنّ $f \in]4;7[$.

2- برهن أنّه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فإنّ: $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فإنّ: $f(x) - x > 0$.

3- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة.

4- أ) بيّن أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$

ب) استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 17

دورة 2020 -م1-

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي)

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$

1- نفرض أنّ : $\alpha = -4$

برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$.

2- نفرض أنّ : $\alpha \neq -4$

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 4$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أحسب S_n بدلالة n و α ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 18

دورة 2020 -م2-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي ، n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1- أحسب كلا من u_1 و u_2 ، ثم خمّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

2- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - n + 1$

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ، يطلب حساب حدّها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

أ) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$.

ب) أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 19

دورة 2021 -م1-

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -4n + 3$.

1- بين أن المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها r وحدها الأول u_0.

2- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -2n^2 + n + 3$

ب) عيّن قيمة العدد طبيعي n حيث : $S_n = -30132$

3- المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = ln(v_n)$

أ) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}.

4- من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$S'_n = \ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] + \ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right] + \cdots + \ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

أحسب S'_n بدلالة n.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 20

دورة 2021 -م2-

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n + 5)$

1- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

2- بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3 - u_n)$

أ) أحسب v_0 ثم بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$.

ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :
$u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n)$

أحسب P_n بدلالة n .

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 21

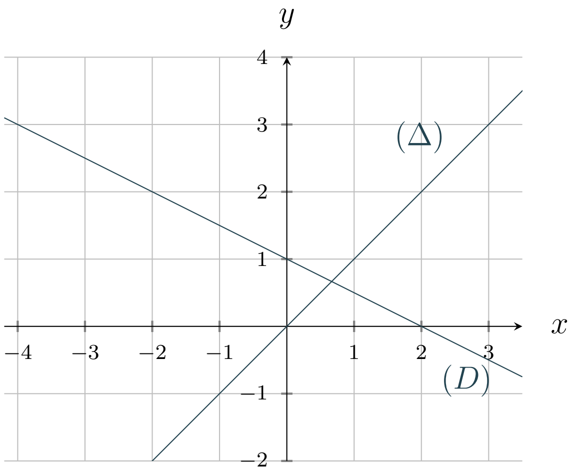
دورة 2022 -م1-

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، (D) و (Δ) المستقيمان المعرّفان كما يلي :

$(D)\ :\ y=x$ و $(\Delta)\ :\ y=-\frac{1}{2}x+1$

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-4$

و $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1$.



1- أنقل الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل.

2- أ) هل المتتالية (u_n) رتيبة ؟ برر إجابتك.

ب) ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n)

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\left(u_n-\frac{2}{3}\right)^2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب v_0

ب) عبّر عن v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتج أن (u_n) متقاربة.

4- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_0\times v_1\times\cdots\times v_{n-1}=\left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 22

دورة 2022 -م2-

(u_n) المتتالية الهندسيّة المعرّفة على $\mathbb{N}$ وحدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} u_0\times u_2=e^2 \\ \ln u_1+\ln u_7=-4 \end{cases}$

1- أ) عيّن u_1 والأساس q للمتتالية (u_n)

ب) تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=e^{2-n}$

2- احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

3- نعتبر المتتالية العدديّة (v_n) المعرّفة بـ: $v_0 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = v_n + u_n$

أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \dfrac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$

ب) بيّن أن (v_n) متقاربة.

4- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\dfrac{1}{e}v_n = \dfrac{1}{1-e}(u_n - e^3)$

ب) نعتبر المجموع S'_n حيث: $S'_n = \dfrac{1}{e}v_0 + \dfrac{1}{e}v_1 + \cdots + \dfrac{1}{e}v_n$

تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n = \dfrac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)\,e^3\right]$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 23

دورة 2023 -م1-

(u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0 = \dfrac{1}{2}$ و أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = -1 + \dfrac{2}{2-u_n}$

1- أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2- نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3- نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$

احسب S_n بدلالة n ثم بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 2^{n+1} + n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 24

دورة 2023 -م2-

(u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ و أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + 1$

1- أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 5$

ب) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما.

2- نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 5$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

جـ) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3- نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثم بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 25

دورة 2024 -م1-

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{4 - u_n}{2 + u_n}$

1- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n \le 2$

2- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب) بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5}{1 - v_n} - 4$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3- من أجل كل عدد طبيعي n، نضع:

$S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2024}$ و $T_n = \frac{1}{4 + u_n} + \frac{1}{4 + u_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{4 + u_{n+2024}}$

احسب S_n بدلالة n ثم استنتج T_n بدلالة n.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 26

دورة 2024 -م2-

1- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x + 1}{2x}$

شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج أنّه من أجل كل x من $]2; +\infty[$ فإنّ $\frac{1}{2} < f(x) \le \frac{3}{4}$

2- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، $n \ge 2$: $u_n = \frac{n}{2^n}$

أ) بين أنّه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإنّ: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

بـ) أثبت أنّه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإنّ: $u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

جـ) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$: $S_n = \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} \cdots + \frac{u_n}{n}$

بيّن أنّ: $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ ثم عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = \frac{511}{1024}$

إضغط للإنتقال إلى الحل

2 -بكالوريات سابقة-شعبة تقني رياضي

التمرين 1

دورة 2014 -م1-

I) f هي الدالة المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x-1)$

1- حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$.

2- أ) عيّن إتجاه تغيّر الدالة f .

ب) بيّن أنّه إذا كان $x \in [2;e+1]$ فإنّ: $f(x) \in [2;e+1]$

II) (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e+1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \in [2;e+1]$

2- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n).

3- برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 2

دورة 2014 -م2-

n و p عددان طبيعيان.

1- أدرس، حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n

2- نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

أ) بيّن أنه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$

ب) عيّن n من أجل $p = 6$

3- f هي الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{4x+2} - 9$

أدرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$

4- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5^{4n+2} - 9}{16}$

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ u_n عدد طبيعي.

5- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

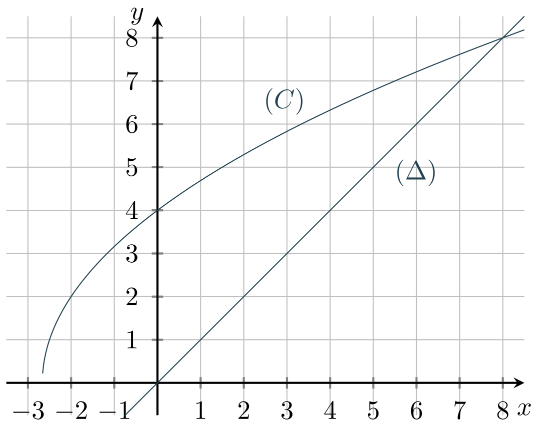
إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 3

دورة 2015 -م1-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

1- h الدالة المعرفة على المجال $]-\frac{8}{3}; +\infty[$ بما يلي: $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y = x$ (أنظر الشكل)



أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3.

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2- أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n < 8$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$.

جـ) استنتج اتجاه تغيّر (u_n).

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < 8 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(8 - u_n)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 4

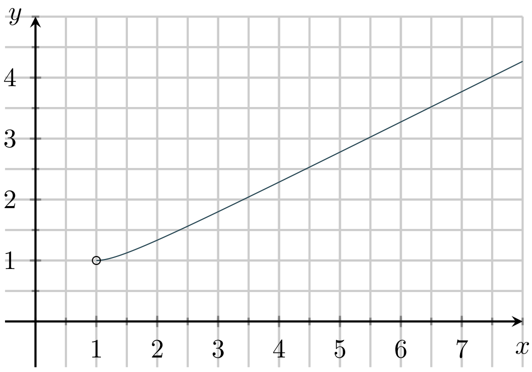
دورة 2016 -م2-

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ ، (الشكل المقابل).

1- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

2- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = f(u_n)$.



أ) انقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الاولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضّحا خطوط الإنشاء.

ب) أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$.

د) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

هـ) برّر تقارب المتتالية (u_n) .

3- نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ) برهن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ،يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) أكتب w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n .

ج) بيّن أنّ : $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4- أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \dfrac{1}{w_0} + \dfrac{1}{w_1} + \cdots + \dfrac{1}{w_n}$.

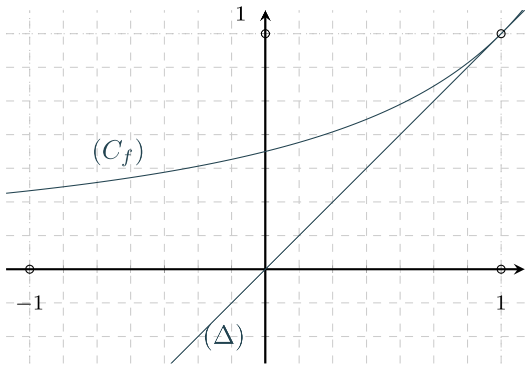
إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 5

الدورة العادية 2017 -م1-

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ : $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.



1- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل،

ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2- برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$.

3- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أنها متقاربة.

4- نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \dfrac{2}{1-u_n}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثم عيّن عبارة حدها العام v_n بدلالة n.

ب) إستنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 6

الدورة الإستثنائية 2017 -م2-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ: $u_1 = \dfrac{1}{a}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{an}u_n$ حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2.

1- أ) بيّن أن ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم إستنتج أنها متقاربة.

2- نعتبر المتتالية v_n المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \dfrac{1}{an}u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{a}$ و عيّن حدّها الأول v_1 بدلالة a.

ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثمّ إستنتج عبارة u_n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أحسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \dfrac{1}{2}u_2 + \dfrac{1}{3}u_3 + \cdots + \dfrac{1}{n}u_n$

ثمّ عيّن قيمة a حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2016}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 7

دورة 2018 -م1-

الدالة العددية المعرّفة والمتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{e.x+1}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0=\dfrac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

1- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>\dfrac{1}{e}$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{e.u_n\left(\dfrac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}$.

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برّر أنها متقاربة.

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\dfrac{e.u_n}{e.u_n-1}$

أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 و عبارة v_n بدلالة n.

3- أ) تحقق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=1+\dfrac{1}{e.u_n-1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n

ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

4- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n • يقبل القسمة على 7.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 8

دورة 2018 -م2-

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي $u_n=2(3)^n$.

و (v_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $v_0=4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=5v_n+u_n$.

1- نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n=\dfrac{v_n}{u_n}+\dfrac{1}{2}$.

اثبت أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الأوّل.

2- اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=5^{n+1}-3^n$

3- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8.

4- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 9

دورة 2019 -م1-

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n - 3n + 1$$

1- أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

4- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 9.

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية على 9 للعدد $1954^{1962} + 1962^{1954} + 1442^{2019}$ ؟

ج) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $6S_n - 7u_n \equiv 0\,[9]$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

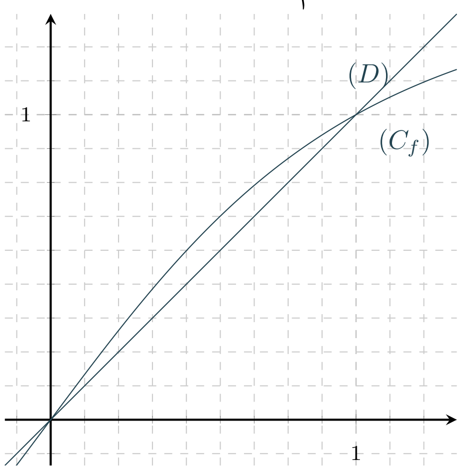
التمرين 10

دورة 2020 -م1-

الدالة العددية f معرّفة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدها الأول $u_0 = \dfrac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$



1- أ) أعد رسم الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $\dfrac{1}{2} \le u_n < 1$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n^2}$

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0.

4- أ) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ب) احسب نهاية المتتالية (u_n).

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 11

دورة 2020 -م2-

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+2}$.

1- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 < u_n < 2$

2- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

ب) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّها متقاربة.

3- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n+\alpha}{u_n+1}$، حيث α عدد حقيقي.

أ) اوجد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، ثمّ احسب حدّها الأول v_0.

ب) بيّن عندئذ أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{2\times 4^n - 1}{4^n+1}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 12

دورة 2021 -م1-

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 1$

1- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < \frac{9}{2}$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثمّ احسب حدها الأوّل.

ب) اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n.

جـ) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \cdots + \frac{1}{3}u_n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 13

دورة 2021 -م2-

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 3 + e^{-2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12$

1- أ) تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $3 < u_n < 4$

2- أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ب) استنتج أنّ (u_n) متقاربة.

3- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب حساب حدها الأوّل.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$

احسب P_n بدلالة n

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 14

دورة 2022 -م1-

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_1 = 2$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} = \frac{n}{2n+2}u_n - \frac{1}{n+1}$ و $v_n = nu_n + 2$.

1- أحسب u_2 و u_3

2- أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- أحسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

4- نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم، $w_n = \frac{4n}{v_n - nu_n}$

أحسب بدلالة n، المجموع S'_n حيث $S'_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 15

دورة 2022 -م2-

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 2)$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > -2$

2- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّ (u_n) متقاربة .

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - u_n}$

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم أكتب v_n بدلالة n

ب) أحسب، بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{v_1} + \cdots + \dfrac{1}{v_n}$

4- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2\left(\dfrac{1}{2^n} - 1\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ب) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 16

دورة 2023 -م1-

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1- برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 3$

2- بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما.

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 3$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و يطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n،

$u_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3$

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4- نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 3n - 3 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 17

دورة 2023 -م2-

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_n + 1}$

1- برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$

2- بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما.

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 - \frac{2}{u_n}$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول v_0.

ب) عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{2}{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4- نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \cdots + \frac{2}{u_n}$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 3n + \frac{1}{2}\left[3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 18

دورة 2024 -م1-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{6 + 6u_n}{5 + u_n}$

1- احسب u_1 و u_2 ثمّ تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 6 - \frac{24}{5 + u_n}$

2- أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n < 3$

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 3}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{8}{3}$ ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = 3 + \frac{5}{v_n - 1}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4- احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + 3 \times v_1 + 3^2 \times v_2 + \cdots + 3^n \times v_n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 19

دورة 2024 -م2-

I) f الدّالة المعرّفة على المجال $[2;3]$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$

ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم بيّن أنّه: من أجل كل x من $[2;3]$، $2 \leq f(x) \leq \dfrac{11}{5}$

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

1- برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $2 < u_n \leq 3$

2- تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر (u_n)

3- أ) بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - 2 \leq \dfrac{1}{4}(u_n - 2)$

ب) برهن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4- استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_0 + u_1 + \cdots + u_n \leq 2(n+1) + \dfrac{4}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

إضغط للإنتقال إلى الحل

3 -بكالوريات سابقة-شعبة رياضيات

التمرين 1

دورة 2014 -م2-

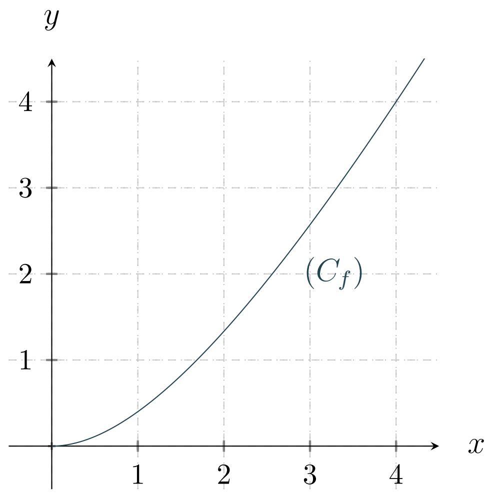
الدالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (أنظر الشكل).

1- بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما

2- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$ و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$.

أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل على حامل محور الفواصل، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.



3- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ) استنتج أن (u_n) متقاربة.

4- أ) أدرس إشارة العدد $7u_{n+1}-6u_n$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_{n+1}\le \dfrac{6}{7}u_n$

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 3\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 2

دورة 2016 -م1-

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأوّل u_0 و أساسها q حيث:

$$\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$$

1- احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q.

2- نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.

أ) عبّر عن u_n بدلالة n.

ب) نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \cdots + \ln(u_n)$ أحسب S_n بدلالة n.

3- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$.

أ) بيّن أنّ $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14)$.

ب) عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n, a_n)$.

جـ) عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها: $PGCD(2S_n, a_n) = 7$.

4- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5- نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.

عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n \equiv 0\,[7] \\ n \equiv 0\,[5] \end{cases}$

6- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 3

الدورة العادية 2017 -م2-

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأوّل $u_0 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

1- برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n.

ب) استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

3- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5.

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 4

الدورة الاستثنائية 2017 -م2-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 4u_n + 1$

1- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

ب) تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوّليين فيما بينهما.

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0.

ب) عبّر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n}$

3- عيّن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$.

4- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرّف بـ : $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 5

دورة 2018 -م1-

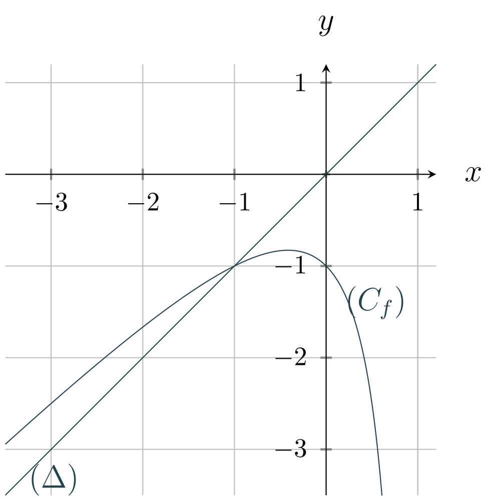
f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = -3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل).



1- أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-3 \leq u_n < -1$.

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}+1 \geq \frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4- نضع: $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$.

بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1) < 0$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 6

دورة 2019 -م1-

1- حل المعادلة $505x-673y=1 \cdots (E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

(لاحظ أنّ: $2019 = 3\times 673$ و $2020 = 4\times 505$)

2- بيّن أنّه من أجل كل ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ: x و y من نفس الإشارة.

3- نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=u_n+505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=v_n+673 \end{cases}$

اكتب u_α بدلالة α ثم اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان.

4- أ) عيّن الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بيّن أنّ هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $X_n = \frac{1}{500}(w_n-2023)$

احسب بدلالة n الجداء $p = X_1.X_2...X_n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 7

دورة 2019 -م2-

(u_n)متتالية عددية حدودها موجبة معرّفة بحدها الأول $u_1=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

1- أ) تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

ب) استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

2- تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = n(n-2)+1$.

3- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: $n-2$ يقسم $n-5$.

4- أ) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$، بيّن أنّ: $PGCD(n-2; u_n) = 1$.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 8

دورة 2020 -م1-

الدالة العددية f معرّفة على المجال $[1;4]$ بـ: $f(x) = \frac{4x+4}{9-x}$

1- أ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[1;4]$.

ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فإنّ: $f(x) \in [1;4]$.

2- المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < 4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة.

3- المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0.

ب) عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4- المجموع S_n معرّف بـ: $S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2 v_2 + \cdots + 8^n v_n$. احسب S_n بدلالة n.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 9

دورة 2020 -م2-

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha) v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha) u_n \end{cases}$$

(α عدد حقيقي)

المتتالية العددية (w_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = v_n - u_n$

1- أ) احسب w_0 ثمّ احسب w_1 بدلالة α.

ب) بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$.

ج) اكتب عبارة w_n بدلالة n و α، ثمّ عيّن قيم n حتى تكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

نفرض في كل ما يلي: $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

2- أ) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أنّ (v_n) متناقصة تماما.

ب) استنتج أنّ (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ.

3- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n + v_n = 2$ واستنتج قيمة ℓ.

4- احسب بدلالة α المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2020}$.

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 10

دورة 2021 -م1-

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = -\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{11u_n + 4}{-4u_n + 1}$

1- أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n + 1)}$

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 < u_n < -1$

ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة.

2- المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثمّ احسب حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{3}{2 + 4 \times 3^n} - 2$

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{u_n + 2} - 2 = -v_n$

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = \ln\left(\frac{3}{u_0 + 2} - 2\right) + \ln\left(\frac{3}{u_1 + 2} - 2\right) + \cdots + \ln\left(\frac{3}{u_n + 2} - 2\right)$$

احسب S_n بدلالة n

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 11

دورة 2021 -م2-

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}$

1- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 2$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة.

2- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n^2 - 4$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = \frac{n \times 2^{n+2} + 3}{2^n} - 2$

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD\left(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}\right) = PGCD\left(2^n; 3\right)$

جـ) استنتج أنّ: $PGCD\left(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}\right) = 1$

د) جدّ قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $S_n = \frac{83}{8}$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 12

دورة 2022 -م1-

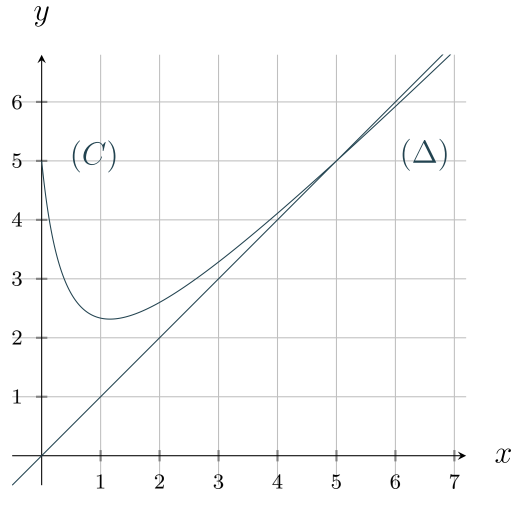
f الدالة العددية المعرّفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{2x + 1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ كما هو مبين في الشكل المرفق.

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1- أ) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

ب) انقل الشكل ومثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 وضع تخميناً حول اتجاه تغيّر (u_n)

2- أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \le u_n < 5$



ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،
$$5-u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$$

4- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n،
$$\frac{2u_n}{2u_n+1}\leq\frac{10}{11}$$

ب) استنتج أنّ $0<5-u_n\leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 13

دورة 2022 -م2-

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$ و $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^2+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}$ و $v_n=u_n-1$

1- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=-\frac{1}{3}(v_n)^2$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-3\leq v_n<0$

3- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) ثمّ استنتج أن (v_n) متقاربة.

4- (w_n) المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n=\ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)$

أ) بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول w_0

ب) أكتب w_n بدلالة n، ثم استنتج v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

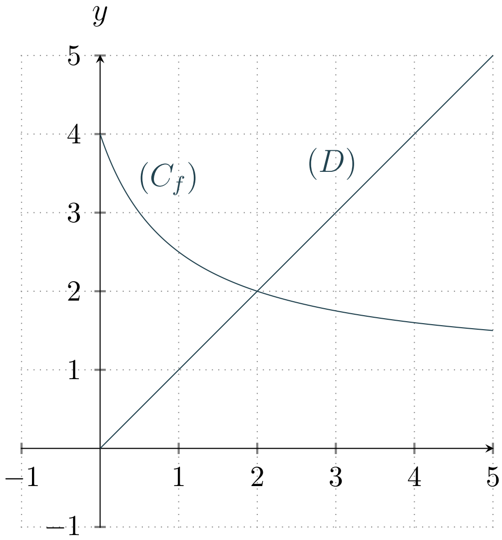
5- أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث $P_n=\frac{1}{v_0}\times\frac{1}{v_1}\times\cdots\times\frac{1}{v_n}$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 14

دورة 2023 -م1-

1- f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.



المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ:

$u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_n = -2 + \frac{4}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3- نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \dfrac{1}{u_0 + 2} + \dfrac{1}{u_1 + 2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n + 2}$

أحسب S_n بدلالة n ثمّ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = \dfrac{1}{16}\left[4n + 7 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$

إضغط للإنتقال إلى الحل

التمرين 15

دورة 2023 -م2-

1- أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1945^{2023} على 11

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق الجملة: $\begin{cases} n \equiv 2023\,[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1444\,[11] \end{cases}$

2- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = \dfrac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 9u_n - 16n + 6$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4u_n - 8n + 2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 9 يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب) عين عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2 \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$

3- نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = \frac{1}{4}\left(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3\right)$

4- بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $4T_{5n} - n^2 + n + 5 \equiv 0\,[11]$

إضغط للإنتقال إلى الحل

3 حلول التمارين

1 -بكالوريات سابقة-شعبة علوم تجريبية

حل التمرين 1

إضغط للعودة إلى التمرين

1- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية : لدينا $v_n = u_n + 1$ و منه :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4 \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 4) = \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + 4 = 5$.

2- كتابة v_n و u_n بدلالة n:

لدينا $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و لدينا $v_n = u_n + 4$ و منه : $u_n = v_n - 4$ إذن : $u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$

3- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4 - \left[5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right] \\ &= 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3} - 1\right) \\ &= 5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right) < 0 \end{aligned}$$

إذن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

4- حساب المجموع S_n:

لدينا $u_n = v_n - 4$ و منه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 - 4) + (v_n - 4) + \cdots + (v_n - 4) \\ &= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{T_n} \underbrace{-4 - \cdots - 4}_{n+1 \text{ حد}} \\ &= T_n - 4(n+1) \end{aligned}$$

نعلم أنّ T_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 5$، ومنه:

$$T_n = v_0 \times \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = 5\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}\right]$$
$$= 5\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{-\frac{1}{3}}\right] = -15\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right]$$

و بالتالي: $S_n = T_n - 4(n+1) = -15\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right] - 4(n+1)$

5-أ) تبيان أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما: لدينا

$$w_{n+1} - w_n = 5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5} - 1\right) - 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$$
$$= \frac{5}{v_{n+1}+5} - \cancel{5} - \frac{5}{v_n+5} + \cancel{5} = \frac{5}{v_{n+1}+5} - \frac{5}{v_n+5}$$

نعلم أن $v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و منه:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{5}{5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 5} - \frac{5}{5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 5} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} - \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1}$$

إذن لإثبات أن $w_{n+1} - w_n > 0$ يكفي إثبات أن $\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1$ و هذا واضح لأن $\frac{2}{3} < 1$ و منه $\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} < 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و بالتالي $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$ و منه المطلوب، إذن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$:

مما سبق لدينا: $w_n = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} - 5$ و كون $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n) = \lim_{n\to+\infty} 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4 - \left(\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} - 5\right) = -4 - 1 + 5 = 0$$

حل التمرين 2

إضغط للعودة إلى التمرين

I) 1- إثبات أن (u_n) متتالية هندسية : لدينا $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ و منه :

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n} \cdot e^{-1} = e^{-1} \cdot u_n$$

إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-1} = \frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{2}}$.

2- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} = 0$$

نستنتج أن (u_n) متتالية متقاربة.

3- حساب المجموع S_n:

نعلم أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-1} = \frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{2}}$ و منه:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} = e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{e-1}{e}} = e^{\frac{3}{2}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{e-1}$$

II) 1- كتابة v_n بدلالة n : لدينا

$$v_n = \ln u_n = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right)$$
$$= \ln\left(e^{\frac{1}{2}} \times e^{-n}\right) = \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^{-n} = \frac{1}{2} - n$$

نستنتج أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$ ،
لأننا نلاحظ $v_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1) = \frac{1}{2} - n - 1 = v_n - 1$

2-

أ) حساب P_n بدلالة n :

نعلم أن $v_n = \ln u_n$ معناه $u_n = e^{v_n}$ و منه :

$$\begin{aligned} P_n &= \ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n) = \ln(e^{v_0} \times e^{v_1} \times \cdots \times e^{v_n}) \\ &= \ln\left(e^{v_0+v_1+\cdots+v_n}\right) = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= (n-0+1)\left(\frac{v_0+v_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{1-n}{2}\right) = \frac{1-n^2}{2} \end{aligned}$$

ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حيث : $P_n + 4n > 0$:

$P_n + 4n > 0$ معناه $\frac{1-n^2}{2} + 4n = \frac{1-n^2+8n}{2} > 0$ أي $1 - n^2 + 8n > 0$

-دراسة اشارة العبارة $-x^2 - 8x + 1$:

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(-1) = 68$ و منه :
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{68}}{-2} = \dfrac{8-\sqrt{68}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{68}}{-2} = \dfrac{8+\sqrt{68}}{2} \end{cases}$$

ومنه حلول المعادلة $-x^2 + 8x + 1 = 0$ هي $S = \{x_1; x_2\}$ و جدول الاشارة كالآتي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$-x^2-8x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه مجموعة الأعداد الطبيعية التي تحقق $P_n + 4n > 0$ تنتمي للمجال $]x_1; x_2[=]-0.12; 8.12[$

و منه $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

حل التمرين 3

إضغط للعودة إلى التمرين

1-حساب u_1 ، u_2 و u_3 : بالتعويض في العبارة التراجعية نجد:

$$u_1 = (1+u_0)e^{-2} - 1 = \left(1 + e^2 - 1\right)e^{-2} - 1 = e^2 \cdot e^{-2} - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$u_2 = (1+u_1)e^{-2} - 1 = (1+0)e^{-2} - 1 = e^{-2} - 1$$
$$u_3 = (1+u_2)e^{-2} - 1 = \left(1 + e^{-2} - 1\right)e^{-2} - 1 = e^{-2} \cdot e^{-2} - 1 = e^{-4} - 1$$

2-إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$: نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $P(n) : 1 + u_n > 0$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $1 + u_0 = 1 + e^2 - 1 = e^2 > 0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

- نفرض أن $P(n): 1+u_n>0$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1): 1+u_{n+1}>0$ صحيحة .

لدينا :

$$1+u_{n+1}=1+(1+u_n)\,e^{-2}-1=(1+u_n)\,e^{-2}$$

حسب فرضية التراجع لدينا $1+u_n>0$ و $e^{-2}>0$ و منه: $(1+u_n)\,e^{-2}>0$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): 1+u_n>0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3-تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة :ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (1+u_n)\,e^{-2}-1-u_n=(1+u_n)\,e^{-2}-(1+u_n) \\ &= (1+u_n)\left(e^{-2}-1\right) \end{aligned}$$

من السؤال السابق لدينا $1+u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي n ، و من جهة $e^{-2}-1<0$ و منه : $u_{n+1}-u_n<0$ من أجل كل عدد طبيعي n ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

- (u_n) متتالية متقاربة لأنها متناقصة تماما و محدودة بالأسفل بالعدد -1 $\left(u_n>-1\right)$

4-نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3\,(1+u_n)$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول : لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3\,(1+u_{n+1})=3\left(1+(1+u_n)\,e^{-2}-1\right) \\ &= 3\,(1+u_n)\,e^{-2}=e^{-2}\cdot v_n \end{aligned}$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-2}$ و حدّها الأول $v_0=3\,(1+u_0)=3\,(1+e^2-1)=3e^2$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارة حدها العام هي :

$$v_n=v_0\times q^n=3e^2\times\left(e^{-2}\right)^n=3e^2\times e^{-2n}=3e^{-2n+2}$$

و من جهة لدينا $v_n=3\,(1+u_n)$ ومنه $1+u_n=\dfrac{v_n}{3}$ أي :

$$u_n=\frac{v_n}{3}-1=\frac{3e^{-2n+2}}{3}-1=e^{-2n+2}-1$$

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n+2}-1=-1$

ج) تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$:

لدينا : $\ln v_n = \ln\left(3 \times e^{-2n+2}\right) = \ln 3 + \ln\left(e^{-2n+2}\right) = \ln 3 - 2n + 2$

و منه :

$$\begin{aligned}
\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n &= \ln 3 - 2\times 0 + 2 + \ln 3 - 2\times 1 + 2 + \cdots + \ln 3 - 2n + 2 \\
&= \underbrace{\ln 3 + \cdots + \ln 3}_{n+1 \text{ مرة}} - 2\underbrace{(0+1+2+\cdots+n)}_{T_n} + \underbrace{2+2+\cdots+2}_{n+1 \text{ مرة}} \\
&= \ln 3 \times (n+1) - 2T_n + 2(n+1) = (n+1)(\ln 3 + 2) - 2T_n
\end{aligned}$$

T_n هو مجموع متتالية حسابية أساسها $r=1$ و حدها الأول 1 و منه : $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

و منه :

$$\begin{aligned}
\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n &= (n+1)(\ln 3 + 2) - 2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (n+1)(\ln 3 + 2) - n(n+1) = (n+1)(\ln 3 + 2 - n)
\end{aligned}$$

حل التمرين 4

إضغط للعودة إلى التمرين

I) $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و $D_f = [0;+\infty[$

1-تعيين اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على D_f و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{4(x+1)-(4x+1)}{(x+1)^2} = \frac{4-1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$:

دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$ على المجال $[0;+\infty[$، لدينا :

$$f(x) - y = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{4x+1-x(x+1)}{x+1} = \frac{4x+1-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+3x+1}{x+1}$$

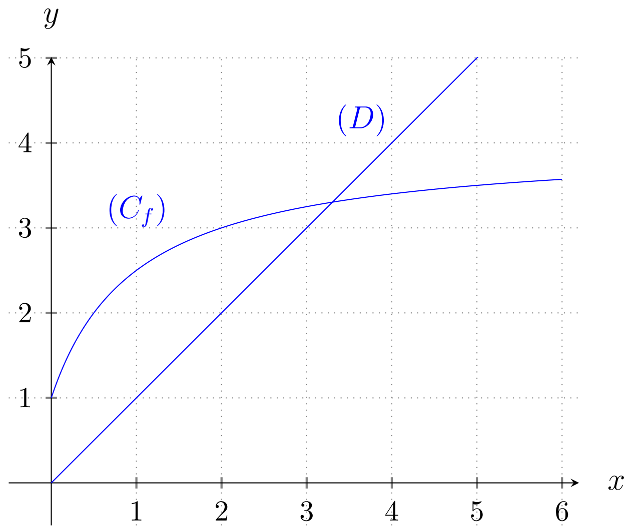
لدينا $x \in [0;+\infty[$ و منه: $x+1>0$ على $[0;+\infty[$

إشارة $-x^2+3x+1$: لدينا $\Delta = b^2-4ac = 9-4(-1) = 13$ و منه $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{-2} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{-2} \end{cases}$

ومنه حلول المعادلة $-x^2+3x+1=0$ هي $S=\{x_1;x_2\}$ و الجدول الآتي يلخص اشارة الفرق و وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) :

x	0		x_2		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) تحت (D)	

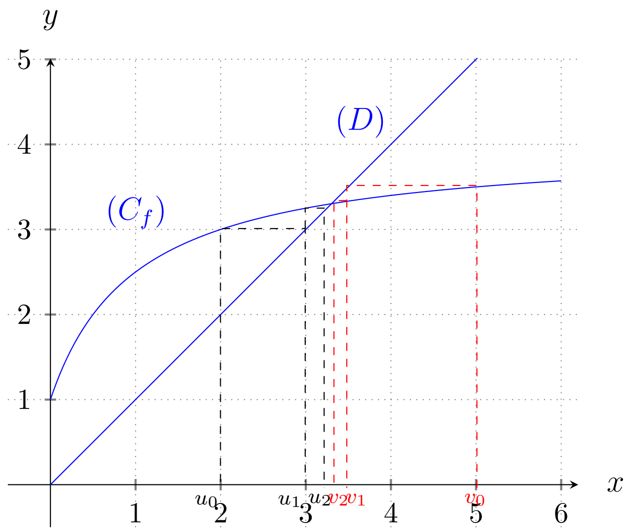
3-تمثيل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$:



II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$

-1

أ) إنشاء على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ، v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها:



ب) تخمين اتجاه تغيَر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n):

- المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو الفاصلة x_2
- المتتالية (v_n) متناقصة تماما و متقاربة نحو الفاصلة x_2

-2

أ) إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$: حيث $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$:

نستعمل البرهان بالتراجع : لاحظ أن $\alpha = x_2$

- نضع $P(n) : 2 \leq u_n < \alpha$

من أجل $n = 0$ لدينا : $2 \leq u_0 < \alpha$ أي $2 \leq 2 < \alpha \simeq 3.30$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : 2 \leq u_n < \alpha$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 2 \leq u_{n+1} < \alpha$ صحيحة .

لدينا من الفرض $2 \leq u_n < \alpha$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2; \alpha[$ فإن :

$$f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha)$$

أي : $2 \leq 3 \leq u_{n+1} < f(\alpha) = \alpha$

$f(\alpha) = \alpha$ لأن من جدول إشارة الفرق $f(x) - y$ السابق لدينا : $f(x_2) - x_2 = 0$ $(x_2 = \alpha)$ و منه $f(\alpha) = \alpha$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 2 \leq u_n < \alpha$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

- نضع $Q(n) : \alpha < v_n \leq 5$

من أجل $n = 0$ لدينا : $\alpha < v_0 \leq 5$ أي $3.30 \simeq \alpha < 5 \leq 5$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .

نفرض أن $Q(n) : \alpha < v_n \leq 5$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n) : \alpha < v_{n+1} \leq 5$ صحيحة .

لدينا من الفرض $\alpha < v_n \leq 5$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha; 5]$ فإن :

$$f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5)$$

أي : $f(\alpha) = \alpha < v_{n+1} \leq \dfrac{21}{6} = 3.6 \leq 5$

و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n) : 2 \leq u_n < \alpha$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) استنتاج اتجاه تغيَر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n):

- ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ و نعلم مما سبق $2 \leq u_n < \alpha$

و من جدول اشارة الفرق $f(x)-y$ نلاحظ أن $f(x)-x>0$ على المجال $[2;\alpha[$
و منه نستنتج أن $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n>0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

• ندرس اشارة الفرق $v_{n+1}-v_n$

لدينا $v_{n+1}-v_n=f(v_n)-v_n$ و نعلم مما سبق $\alpha<v_n\leq 5$
و من جدول اشارة الفرق $f(x)-y$ نلاحظ أن $f(x)-x<0$ على المجال $]\alpha;5]$
و منه نستنتج أن $v_{n+1}-v_n=f(v_n)-v_n<0$ إذن المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

3-

أ) إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{3}(v_n-u_n)$: لدينا :

$$\begin{aligned}v_{n+1}-u_{n+1}&=f(v_n)-f(u_n)=\frac{4v_n+1}{v_n+1}-\frac{4u_n+1}{u_n+1}\\&=\frac{(4v_n+1)(u_n+1)-(4u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}\\&=\frac{4v_n+u_n-4u_n-v_n}{(v_n+1)(u_n+1)}=\frac{3v_n-3u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}=\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}\cdots(*)\end{aligned}$$

لدينا من المعطيات $\begin{cases}2\leq u_n<\alpha\\ \alpha<v_n\leq 5\end{cases}$ أي $\begin{cases}2\leq u_n\\ 2\leq v_n\end{cases}$ و منه $\begin{cases}3\leq u_n+1\\ 3\leq v_n+1\end{cases}$

لاحظ أن $v_n-u_n>0$ من أجل كل n
و منه $9\leq(u_n+1)(v_n+1)$ إذن $\frac{1}{9}\geq\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}$ و بالتعويض في $(*)$ نجد :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}\leq\frac{3(v_n-u_n)}{9}=\frac{1}{3}(v_n-u_n)$$

و منه المطلوب .

ب) تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0<v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$: نستعمل البرهان بالتراجع

• نضع $E(n):0<v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

من أجل $n=0$ لدينا : $0<v_0-u_0\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ أي $0<5-2\leq 3$ و منه : $E(0)$ صحيحة .

نفرض أن $E(n):0<v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ صحيحة، و نثبت أن
$E(n+1):0<v_{n+1}-u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \geq v_n - u_n > 0$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد $\frac{1}{3}$

نجد $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \geq \frac{1}{3} \times (v_n - u_n) > 0$ أي $\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \geq \frac{v_n - u_n}{3} > 0$ و من السؤال السابق لدينا:

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

و منه $E(n+1)$ صحيحة. إذن : $E(n) : 0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ج) استنتاج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ ، ثم حساب نهاية كل من (u_n) و (v_n):

لدينا من السؤال السابق $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \geq v_n - u_n > 0$ بإدخال النهاية على اطراف المتراجحة نجد

$$0 < \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ أي $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) \leq 0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

حساب نهاية كل من (u_n) و (v_n):

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ و بما أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

و من جهة لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ معناه : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

و منه $\frac{4\ell + 1}{\ell + 1} = \ell$ تكافئ $4\ell + 1 = \ell^2 + \ell$ تكافئ $\ell^2 - 3\ell - 1 = 0$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-1) = 13$ و منه : $\begin{cases} \ell = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ \ell' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

ℓ' مرفوض لأنه لا ينتمي لأي من المجالين $]2;\alpha[$ و $]\alpha;5]$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell = \alpha$.

حل التمرين 5

إضغط للعودة إلى التمرين

I) $f(x) = \sqrt{2x+8}$ و $D_f = [0; +\infty[$

-1

أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+8} = +\infty$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على D_f و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = (2x+8)' \times \frac{1}{2\sqrt{2x+8}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2x+8}} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

•**جدول التغيرات :** لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $f(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$2\sqrt{2} \nearrow +\infty$

2- تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) :

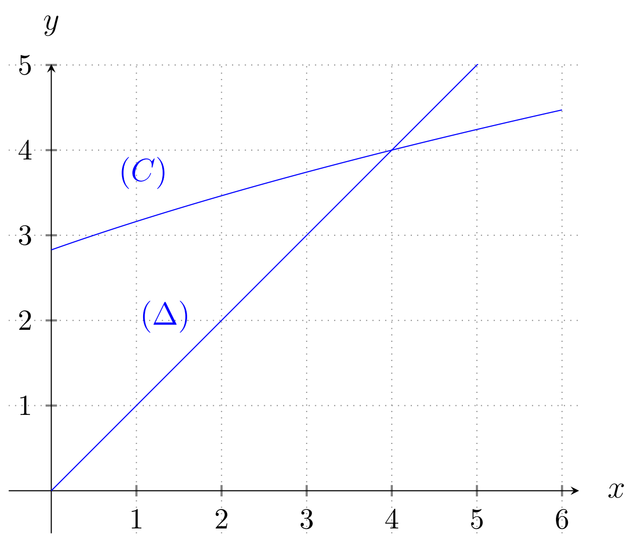
نقوم بحل المعادلة $f(x) = y$ أي $\sqrt{2x+8} = x \cdots (*)$

بتربيع طرفي المعادلة $(*)$ نجد $2x+8 = x^2$ ، تكافئ: $x^2 - 2x - 8 = 0$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-8) = 36$ و منه $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$

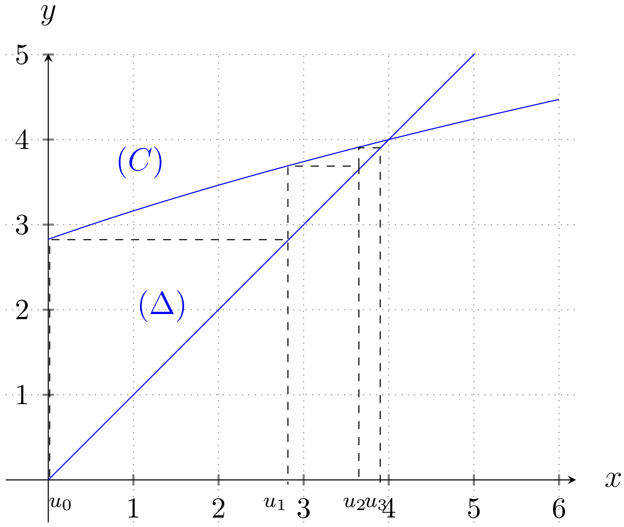
x_2 مرفوض لأنه لا ينتمي لـ: D_f ، و منه نقطة تقاطع (C) مع المستقيم (Δ) هي $A(4; f(4))$ أي $A(4;4)$

3- رسم (C) و (Δ) :



II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1- تمثيل الحدود u_0،u_1،u_2 و u_3:



2- تخمين حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C) مع المستقيم Δ أي $x = 4$

3-

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$:

نضع $P(n) : 0 \leq u_n < 4$

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \leq u_0 < 4$ أي $0 \leq 0 < 4$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : 0 \leq u_n < 4$ صحيحة، و نثبت أن $P(n) : 0 \leq u_{n+1} < 4$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 \leq u_n < 4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4[$ فإن :

$$f(0) \leq f(u_n) < f(4)$$

أي : $0 \leq \sqrt{8} \leq u_{n+1} < 4$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 0 \leq u_n < 4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) دراسةاتجاه تغير المتتالية (u_n):ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، لدينا

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n+8} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+8} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n+8} + u_n} = \frac{2u_n + 8 - u_n^2}{\sqrt{2u_n+8} + u_n}$$

حسب السؤال السابق $u_n \geq 0$ و منه المقام موجب تماما، إذن يكفي دراسة إشارة البسط $-u_n^2+2u_n+8$

لاحظ أن :

$$-u_n^2+2u_n+8=-u_n^2+2u_n-1+9=-\left(u_n^2-2u_n+1\right)+9$$
$$=3^2-(u_n-1)^2=(4-u_n)(2+u_n)$$

ملاحظة: يمكن الحصول على النتيجة السابقة بحل المعادلة من الدرجة الثانية $-x^2+2x+8=0$

نعلم أن $0\le u_n<4$ و منه $\begin{cases}4-u_n>0\\2+u_n>0\end{cases}$ إذن $u_{n+1}-u_n=(4-u_n)(2+u_n)>0$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

جـ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$:لدينا

$$4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}=\frac{\left(4-\sqrt{2u_n+8}\right)\left(4+\sqrt{2u_n+8}\right)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$$
$$=\frac{16-(2u_n+8)}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{8-2u_n}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$$

من البرهان بالتراجع لدينا $0\le u_{n+1}<4$ أي $0\le\sqrt{2u_n+8}<4$ بإضافة العدد 4 إلى أطراف المتراجحة نجد: $4\le4+\sqrt{2u_n+8}<8$ و هذا يكافئ $\frac{1}{4}\le\frac{1}{4+\sqrt{2u_n+8}}<\frac{1}{8}$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد الموجب $2(4-u_n)$ نحصل على :

$$\frac{2(4-u_n)}{8}<\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}\le\frac{2(4-u_n)}{4}=\frac{1}{2}(4-u_n)$$

و منه : $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$

• **الاستنتاج:** نستعمل البرهان بالتراجع :

نضع $Q(n):4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$

من أجل $n=0$ لدينا : $4-u_0\le\frac{1}{2^0}(4-u_0)$ أي $4\le4$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .

نفرض أن $Q(n):4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1):4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ صحيحة .

لدينا من الفرض $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد $\frac{1}{2}$ نجد $\frac{1}{2}(4-u_n)\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و من السؤال السابق لدينا: $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ أي $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n):4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$

صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

د) استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا مما سبق $0 < 4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$ و بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

بادخال النهاية على اطراف المتراجحة نجد : $0 < \lim\limits_{n\to+\infty}(4 - u_n) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$

و منه $0 < 4 - \ell \leq 0$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ و بالتالي $4 - \ell = 0$ أي $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

حل التمرين 6

إضغط للعودة إلى التمرين

(I $f(x) = \frac{5x}{x+2}$ و $D_f = [0; +\infty[$

-1

أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على D_f و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(5x)'(x+2) - (x+2)'(5x)}{(x+2)^2} = \frac{5(x+2) - 5x}{(x+2)^2} = \frac{10}{(x+2)^2} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

•**جدول التغيرات :** لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$ و $f(0) = 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 5$

2- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$:

لدينا من جدول التغيرات $f(0) = 0$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و بالتالي : $f(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{u_n + 2}$.

1-

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$:

نضع $P(n) : 1 \leq u_n \leq 3$

من أجل $n = 0$ لدينا : $1 \leq u_0 \leq 3$ أي $1 \leq 1 \leq 3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : 1 \leq u_n \leq 3$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 1 \leq u_{n+1} \leq 3$ صحيحة .

لدينا من الفرض $1 \leq u_n \leq 3$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;3]$ فإن :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$$

أي : $1 \leq \dfrac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 1 \leq u_n \leq 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة : دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{5u_n - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{u_n[5 - (u_n + 2)]}{u_n + 2} = \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 2}$$

من السؤال السابق لدينا $1 \leq u_n \leq 3$ و منه $\begin{cases} 3 - u_n \geq 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$ أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

•**استنتاج التقارب :** بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى $u_n \leq 3$ فهي متقاربة .

2- (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 1 - \dfrac{3}{u_n}$.

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول : لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{5u_n}{u_n + 2}} = 1 - \frac{3(u_n + 2)}{5u_n} \\ &= 1 - \frac{3u_n + 3 \times 2}{5u_n} = 1 - \frac{3u_n}{5u_n} - \frac{3 \times 2}{5u_n} = 1 - \frac{3}{5} - \frac{3 \times 2}{5u_n} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{3 \times 2}{5u_n} = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{3}{u_n}\right) = \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{5}$ و حدّها الأول $v_0 = 1 - \dfrac{3}{u_0} = -2$

ب) <u>كتابة بدلالة n عبارة v_n ثم استنتاج عبارة u_n :</u>

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

و لدينا $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ أي $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$

و منه عبارة u_n هي : $u_n = \frac{3}{1-v_n} = \frac{3}{1+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

جـ) <u>حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:</u>

بما أن $-1 < \frac{2}{5} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{1+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{3}{1} = 3$

-3 <u>حساب بدلالة n المجموع S_n :</u>

لدينا $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ و منه $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$ أي $\frac{1}{u_n} = \frac{1-v_n}{3}$ ، بالتعويض نجد :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n} = \frac{1-v_0}{3} + \frac{1-v_1}{3} + \cdots + \frac{1-v_n}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \cdots + 1 - v_n) = \frac{1}{3}\left[\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{مرة}\ n+1} - \underbrace{(v_0+v_1+\cdots+v_n)}_{T_n}\right] = \frac{1}{3}(n+1-T_n)$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{2}$ و حدها الأول $v_0 = -2$ أي:

$$T_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} = -2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{3}{5}} = -10 \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}$$

و منه نجد : $$S_n = \frac{1}{3}\left(n+1+10\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}\right)$$

حل التمرين 7

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) <u>تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :</u>

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(13x)'(9x+13) - (9x+13)'(13x)}{(9x+13)^2} = \frac{13\times(9x+13) - 9\times(13x)}{(9x+13)^2}$$
$$= \frac{169}{(9x+13)^2} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$.

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى المجال I :

يعني إثبات أنه إذن كان $0 \leq x \leq 4$ فإن $0 \leq f(x) \leq 4$

لدينا $0 \leq x \leq 4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ فإن :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(4)$$

أي : $0 \leq f(x) \leq \frac{52}{49} \leq 4$

و منه $f(x)$ ينتمي إلى المجال I

2- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq u_n \leq 4$:

نضع $P(n) : 0 \leq u_n \leq 4$

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 4$ أي $0 \leq 4 \leq 4$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : 0 \leq u_n \leq 4$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 0 \leq u_{n+1} \leq 4$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 \leq u_n \leq 4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ فإن :

$$0 \leq f(u_n) \leq \frac{52}{49} \leq 4$$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 0 \leq u_n \leq 4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة :

دراسة اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{13u_n}{9u_n+13} - u_n = \frac{13u_n - u_n(9u_n+13)}{9u_n+13} = \frac{-9u_n^2}{9u_n+13}$$

من السؤال السابق لدينا $u_n \geq 0$ ومنه $\begin{cases} -9u_n^2 \leq 0 \\ 9u_n + 13 > 0 \end{cases}$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

•**استنتاج التقارب :** بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل $0 \leq u_n$ فهي متقاربة .

3- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$: نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $Q(n) : u_n \neq 0$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 \neq 0$: أي $4 \neq 0$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .

نفرض أن $Q(n) : u_n \neq 0$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1) : u_{n+1} \neq 0$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n \neq 0$ و لدينا $u_{n+1} = \dfrac{13u_n}{9u_n + 13}$ واضح أن $u_{n+1} \neq 0$

و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n) : u_n \neq 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . **4-** لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \dfrac{13}{u_n}$

أ) برهان أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0 : لدينا

$$v_{n+1} = 2 + \frac{13}{u_{n+1}} = 2 + \frac{13}{\dfrac{13u_n}{9u_n+13}} = 2 + \frac{13\,(9u_n+13)}{13u_n}$$
$$= 2 + \frac{9u_n+13}{u_n} = 2 + \frac{9u_n}{u_n} + \frac{13}{u_n} = 2 + \frac{13}{u_n} + 9 = v_n + 9$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = 9$ و حدّها الأول $v_0 = 2 + \dfrac{13}{u_0} = \dfrac{21}{4}$

ب) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا المتتالية (v_n) حسابية و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n = v_0 + nr = \dfrac{21}{4} + 9n$

ج) استنتاج أن : $u_n = \dfrac{52}{36n+13}$ ، ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. :

لدينا $v_n = 2 + \dfrac{13}{u_n}$ أي $v_n - 2 = \dfrac{13}{u_n}$ و منه

$$u_n = \frac{13}{v_n - 2} = \frac{13}{\dfrac{21}{4} + 9n - 2} = \frac{13}{\dfrac{21 + 4\times 9n - 4\times 2}{4}} = \frac{4\times 13}{13+36n} = \frac{52}{13+36n}$$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{52}{13+36n} = 0$

حل التمرين 8

إضغط للعودة إلى التمرين

1-تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 : لدينا

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}-1}{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}+2}=\frac{\dfrac{2u_n+2-(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{2u_n+2+2(u_n+3)}{u_n+3}}$$

$$=\frac{2u_n+2-(u_n+3)}{2u_n+2+2(u_n+3)}=\frac{u_n-1}{4u_n+8}=\frac{1}{4}\times\frac{u_n-1}{u_n+2}=\frac{1}{4}v_n$$

و بالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=-\frac{1}{2}$

2-

أ) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام v_n :

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب) استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ أي $v_n(u_n+2)=u_n-1$ تكافئ $v_nu_n+2v_n=u_n-1$ أي $v_nu_n+2v_n-u_n=-1$
تكافئ $u_n(v_n-1)=-1-2v_n$ و منه

$$u_n=\frac{-1-2v_n}{v_n-1}=\frac{2v_n+1}{1-v_n}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)+1}{1-\left(-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

جـ) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $-1<\frac{1}{4}<1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{1}{1}=1$

-3

أ) حساب بدلالة n المجموع : S_n :لدينا S_n مجموع متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول v_0 و بالتالي :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -\frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = -2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3}$$

ب) التحقق أنّ: $\frac{1}{3}(1-v_n) = \frac{1}{u_n+2}$ وذلك من أجل كلّ عدد طبيعي n :لدينا

$$\frac{1}{3}(1-v_n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{u_n-1}{u_n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n+2-(u_n-1)}{u_n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{u_n+2}\right) = \frac{1}{u_n+2}$$

جـ) استنتاج بدلالة n المجموع: S'_n :حسب السؤال السابق لدينا

$$S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1-v_0) + \frac{1}{3}(1-v_1) + \cdots + \frac{1}{3}(1-v_n)$$
$$= \frac{1}{3}\left[\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1\ \text{مرة}} - (v_0+v_1+\cdots+v_n)\right] = \frac{1}{3}(n+1-S_n) = \frac{1}{3}\left(n+1+2\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3}\right)$$

حل التمرين 9

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) برهان بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$:

نضع $P(n) : 0 < u_n < 1$

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 < u_0 < 1$ أي $0 < \frac{1}{4} < 1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : 0 < u_n < 1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 0 < u_{n+1} < 1$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 < u_n < 1$ أي $4 < u_n+4 < 5$ تكافئ $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+4} < \frac{1}{5}$ أي $\frac{10}{4} < \frac{10}{u_n+4} < \frac{10}{5}$

و منه $-2 < -\frac{10}{u_n+4} < -\frac{5}{2}$ أي $3-2 < 3-\frac{10}{u_n+4} < 3-\frac{5}{2}$ و بالتالي $1 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ $0 <$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): 0<u_n<1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج أنّها متقاربة :دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=3-\frac{10}{u_n+4}-u_n=\frac{3\left(u_n+4\right)-10-u_n\left(u_n+4\right)}{u_n+4}$$
$$=\frac{3u_n+12-10-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$$

من البرهان بالتراجع لدينا $0<u_n<1$ و منه $0<u_n+4$ أي المقام موجب تماما فيكفي دراسة اشارة البسط ، نقوم بتحليل العبارة $-u_n^2-u_n+2$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى و ذلك بحل المعادلة $-x^2-x+2=0$

لدينا $\Delta=b^2-4ac=1-4\times(-1)\times 2=9$ و منه $\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+3}{-2}=-2 \\ x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-3}{-2}=1 \end{cases}$

و منه $-x^2-x+2=-(x+2)(x-1)$ إذن $-u_n^2-u_n+2=-\left(u_n+2\right)\left(u_n-1\right)$

لدينا $0<u_n<1$ و منه $\begin{cases} u_n+2>0 \\ -1<u_n-1<0 \end{cases}$ إذن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-\left(u_n+2\right)\left(u_n-1\right)}{u_n+4}>0$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى $(u_n<1)$ فهي متقاربة.

-2

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم كتابة حدّها العام v_n بدلالة n :لدينا

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{3-\dfrac{10}{u_n+4}+2}{1-\left(3-\dfrac{10}{u_n+4}\right)}=\frac{5-\dfrac{10}{u_n+4}}{\dfrac{10}{u_n+4}-2}$$
$$=\frac{\dfrac{5\left(u_n+4\right)-10}{u_n+4}}{\dfrac{10-2\left(u_n+4\right)}{u_n+4}}=\frac{5\left(u_n+4\right)-10}{10-2\left(u_n+4\right)}=\frac{5u_n+10}{2-2u_n}=\frac{5}{2}\times\frac{u_n+2}{1-u_n}=\frac{5}{2}v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0+2}{1-u_0}=\dfrac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{4}}=3$

- **عبارة الحد العام** v_n:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n=v_0\times q^n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$

ب) إثبات أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \dfrac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتاج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا $v_n = \dfrac{u_n+2}{1-u_n}$ و منه $v_n(1-u_n) = u_n+2$ أي $v_n - v_nu_n - u_n = 2$

تكافئ $-u_n(v_n+1) = 2 - v_n$ تكافئ $u_n(v_n+1) = v_n - 2$ و منه :

$$u_n = \frac{v_n-2}{v_n+1} = \frac{v_n+1-1-2}{v_n+1} = \frac{v_n+1}{v_n+1} - \frac{3}{v_n+1} = 1 - \frac{3}{v_n+1} = 1 - \frac{3}{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $\dfrac{5}{2} > 1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^n = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n+1} = 1$

حل التمرين 10

إضغط للعودة إلى التمرين

I) التحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$:

- **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[-4;1]$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(3x-16)'(x+11)-(x+11)'(3x-16)}{(x+11)^2} = \frac{3(x+11)-(3x-16)}{(x+11)^2} = \frac{49}{(x+11)^2} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

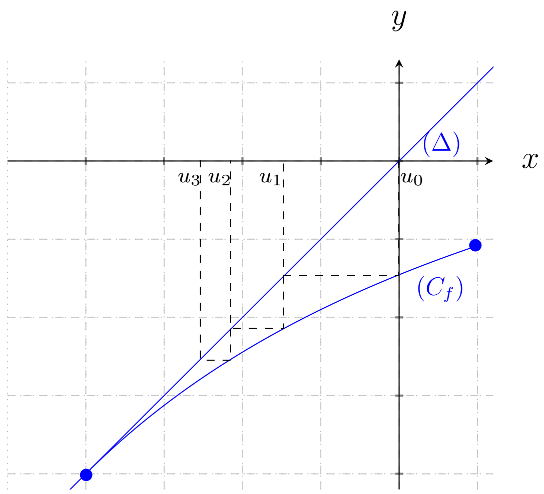
- **تبيان أنّ : من أجل** $x\in[-4;1]$ **فإن** $f(x)\in[-4;1]$:

أي نبين أنه إذا كان $-4\leq x\leq 1$ فإن $-4\leq f(x)\leq 1$

لدينا $-4\leq x\leq 1$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ فإن $f(-4)\leq f(x)\leq f(1)$ أي $-4\leq f(x)\leq -\dfrac{13}{12}\leq 1$

II) (u_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :



• التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة تماما و متقاربة نحو القيمة $x=4$

2- برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4<u_n\leq 0$:

نضع $P(n):-4<u_n\leq 0$

من أجل $n=0$ لدينا : $-4<u_0\leq 0$ أي $-4<0\leq 0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n):-4<u_n\leq 0$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1):0<u_{n+1}<1$ صحيحة .

لدينا من الفرض $-4<u_n\leq 0$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-4;0]$ فإن $f(-4)<f(u_n)\leq f(0)$

أي $-4<u_{n+1}\leq \frac{-16}{11}\leq 0$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n):-4<u_n\leq 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

• تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما : ندرس اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n=\frac{3u_n-16-u_n(u_n+11)}{u_n+11}\\&=\frac{3u_n-16-u_n^2-11u_n}{u_n+11}=\frac{-u_n^2-8u_n-16}{u_n+11}=-\frac{(u_n+4)^2}{u_n+11}<0\end{aligned}$$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

3- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي : $v_n\times u_n=1-4v_n$

• إثبات أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$:

لدينا $v_n\times u_n=1-4v_n$ تكافئ $v_n\times u_n+4v_n=1$ تكافئ $v_n(u_n+4)=1$ أي $v_n=\frac{1}{u_n+4}$ و منه

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=\frac{1}{u_{n+1}+4}=\frac{1}{\frac{3u_n-16}{u_n+11}+4}=\frac{1}{\frac{3u_n-16+4(u_n+11)}{u_n+11}}=\frac{u_n+11}{3u_n-16+4(u_n+11)}\\&=\frac{u_n+11}{3u_n-16+4u_n+44}=\frac{u_n+11}{7u_n+28}=\frac{u_n+4+7}{7(u_n+4)}=\frac{u_n+4}{7(u_n+4)}+\frac{7}{7(u_n+4)}=\frac{1}{7}+v_n\end{aligned}$$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{7}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0+4}=\frac{1}{4}$ و الحد العام هو $v_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}n$

• حساب المجموع S:

لدينا $v_n\times u_n=1-4v_n$ بالتعويض في المجموع S نجد:

$$\begin{aligned}S&=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\cdots+v_{2016}\times u_{2016}=1-4v_0+1-4v_1+\cdots+1-4v_{2016}\\&=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2017}-4\underbrace{(v_0+v_1+\cdots+v_{2016})}_{T}=2017-4T\end{aligned}$$

T هو مجموع متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{4}$ و حدها الأخير $v_{2016} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \times 2016$ و منه :

$$T = \frac{2017}{2} \times (v_0 + v_{2016}) = \frac{2017}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \times 2016\right) = \frac{2017}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2016}{7}\right) = \frac{1163809}{4}$$

و منه

$$S = 2017 - 4T = 2017 - 4 \times \frac{1163809}{4} = 2017 - 1163809 = -1161792$$

حل التمرين 11

إضغط للعودة إلى التمرين

1- حساب الحدين u_1 و v_1 :

لدينا
$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \\ v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{3}{4} \times 6 + 1 = \frac{11}{2} \end{cases}$$

2-

أ) كتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$ لدينا:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$$

ب) برهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما معناه $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

و المتتالية (v_n) متناقصة تماما معناه $v_{n+1} - v_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

و بالتالي نضع : $P(n) : u_{n+1} - u_n > 0$ و $Q(n) : v_{n+1} - v_n < 0$

- $P(n) : u_{n+1} - u_n > 0$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_1 - u_0 > 0$ أي $\frac{7}{4} - 1 > 0$ أي $\frac{1}{4} > 0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : u_{n+1} - u_n > 0$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_{n+1} - u_n > 0$ و حسب السؤال السابق $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_{n+1} - u_n > 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

- $Q(n) : v_{n+1} - v_n < 0$

من أجل $n = 0$ لدينا : $v_1 - v_0 < 0$ أي $\frac{11}{2} - 6 < 0$ أي $-\frac{1}{2} < 0$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .

نفرض أن $Q(n) : v_{n+1} - v_n < 0$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1) : v_{n+2} - v_{n+1} < 0$ صحيحة .

لدينا من الفرض $v_{n+1}-v_n<0$ و حسب السؤال السابق نستنتج $v_{n+2}-v_{n+1}=\frac{3}{4}(v_{n+1}-v_n)<0$
و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n):v_{n+1}-v_n<0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3-نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=u_n-v_n$.

- برهان أن المتتالية (w_n) هندسية و تعيين حدها العام w_n لدينا:

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1-\left(\frac{3}{4}v_n+1\right)=\frac{3}{4}(u_n-v_n)=\frac{3}{4}w_n$$

و منه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ و حدها الأول $w_0=u_0-v_0=1-6=-5$
و بالتالي عبارة حدها العام هي : $w_n=w_0\times q^n=-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

4- تبيان أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان :
بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما و لدينا

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ و ذلك كون أن $-1<\frac{3}{4}<1$، و منه المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

حل التمرين 12

إضغط للعودة إلى التمرين

I) تعيين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة :
(u_n) متتالية ثابتة معناه $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$ و هذا يكافئ

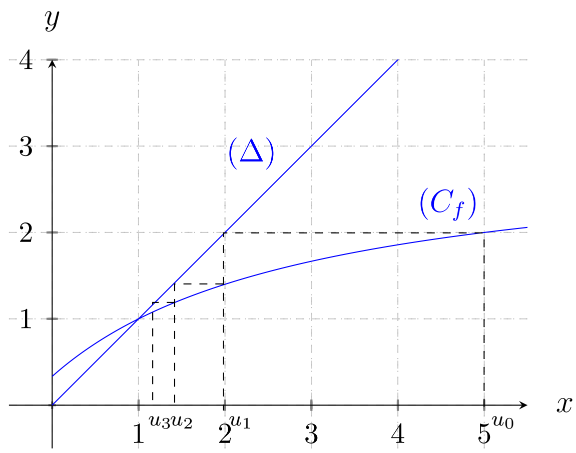
$$u_{n+1}=f(u_n)=f(\alpha)=\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$$

و منه $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$ أي $3\alpha+1=\alpha(\alpha+3)$ تكافئ $3\alpha+1=\alpha^2+3\alpha$ و بالتالي $\alpha^2=1$ إذن $\alpha=1$ (α موجب)
و منه قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة هي $\alpha=1$

II) نضع في كل مايلي : $\alpha=5$

1-

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :



ب) <u>التخمين:</u>
المتتالية (u_n) متناقصة تماما و متقاربة نحو فاصلة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ)

2-نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ) <u>برهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و تعيين حدّها الأول:</u>لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{3u_n+1-(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{3u_n+1+(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{3u_n+1-(u_n+3)}{3u_n+1+(u_n+3)}$$
$$= \frac{2u_n-2}{4u_n+4} = \frac{2(u_n-1)}{4(u_n+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدّها الأول $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{5-1}{5+1} = \dfrac{2}{3}$

ب) <u>كتابة بدلالة n عبارة v_n و u_n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:</u>
لدينا (v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
و من جهة لدينا $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ تكافئ $v_n(u_n+1) = u_n - 1$ تكافئ $v_nu_n + v_n - u_n = -1$ أي
$u_n(v_n-1) = -1 - v_n$ و منه

$$u_n = \frac{-1-v_n}{v_n-1} = \frac{1+v_n}{1-v_n} = \frac{1+\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$$

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1$

3-حساب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n :

S_n هو مجموع متتالية هندسية حدها الأول v_n و عدد حدودها 2017 و منه

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016} = v_n \times \frac{1-q^{2017}}{1-q} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]$$

حساب S'_n : لاحظ أن

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{u_n+1-1-1}{u_n+1} = \frac{u_n+1-2}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+1} - \frac{2}{u_n+1} = 1 - \frac{2}{u_n+1}$$

معناه $\frac{2}{u_n+1} = 1 - v_n$ أي $\frac{1}{u_n+1} = \frac{1-v_n}{2}$ بالتعويض في S'_n نجد :

$$S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + \cdots + \frac{1}{u_{n+2016}+1} = \frac{1-v_n}{2} + \frac{1-v_{n+1}}{2} + \cdots + \frac{1-v_{n+2016}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1\,\text{مرة}} - \underbrace{(v_n+v_{n+1}+\cdots+v_{n+2016})}_{S_n}\right] = \frac{1}{2}(n+1-S_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[n+1-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]\right]$$

حل التمرين 13

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$:

نضع $P(n) : u_n > -2$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 > -2$ أي $1 > -2$ و منه $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : u_n > -2$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} > -2$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n > -2$ و منه $u_n + 5 > 3$ أي $\frac{1}{u_n+5} < \frac{1}{3}$ أي $1 - \frac{9}{u_n+5} > -2$

و بالتالي $u_{n+1} > -2$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n > -2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتاج أنها متقاربة :دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n+5} - u_n = \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n+5)}{u_n+5}$$
$$= \frac{u_n - 4 - u_n^2 - 5u_n}{u_n+5} = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n+5} = -\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5} < 0$$

لأن $u_n + 5 > 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

• استنتاج التقارب:

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأسفل $(u_n > -2)$ فهي متقاربة.

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$

• إثبات أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و تعيين حدها الأول :لدينا

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n+5} + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n+5}} = \frac{1}{\frac{3(u_n+5)-9}{u_n+5}}$$
$$= \frac{u_n+5}{3(u_n+5)-9} = \frac{u_n+5}{3(u_n+5-3)} = \frac{u_n+2+3}{3(u_n+2)}$$
$$= \frac{u_n+2}{3(u_n+2)} + \frac{3}{3(u_n+2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3} + v_n$$

و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

3-كتابة بدلالة n عبارتي v_n و u_n ، و حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا (v_n) متتالية حسابية إذن عبارتها من الشكل $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \frac{n+1}{3}$

و لدينا $v_n = \frac{1}{u_n+2}$ أي $u_n + 2 = \frac{1}{v_n}$ و منه

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1}{\frac{n+1}{3}} - 2 = \frac{3}{n+1} - 2$$

•حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} - 2 = -2$

4-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$:

لدينا $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ معناه $u_nv_n+2v_n=1$ و منه $u_nv_n=1-2v_n$ بالتعويض في عبارة المجموع

$$\begin{aligned}u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n&=1-2v_0+1-2v_1+\cdots+1-2v_n\\&=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1\text{مرة}}-2\underbrace{(v_0+v_1+\cdots+v_n)}_{S_n}=n+1-2S_n\end{aligned}$$

S_n هو مجموع متتالية حسابية و بالتالي :

$$S_n=\frac{n+1}{2}\times(v_0+v_n)=\frac{n+1}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{n+1}{3}\right)=\frac{n+1}{2}\times\left(\frac{n+2}{3}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n&=n+1+2S_n=n+1-2S_n=n+1-2\frac{(n+1)(n+2)}{6}\\&=n+1-\frac{(n+1)(n+2)}{3}=\frac{3(n+1)}{3}-\frac{(n+1)(n+2)}{3}\\&=\frac{(n+1)(3-n-2)}{3}=\frac{(n+1)(1-n)}{3}=\frac{1-n^2}{3}\end{aligned}$$

حل التمرين 14

إضغط للعودة إلى التمرين

1-حساب كل من u_1 ، u_2 و u_3 :لدينا

$$\begin{aligned}u_1&=u_0+\ln\left(\frac{2\times0+3}{2\times0+1}\right)=0+\ln3=\ln3\\u_2&=u_1+\ln\left(\frac{2\times1+3}{2\times1+1}\right)=\ln3+\ln\left(\frac{5}{3}\right)=\ln3+\ln5-\ln3=\ln5\\u_3&=u_2+\ln\left(\frac{2\times2+3}{2\times2+1}\right)=\ln5+\ln\left(\frac{7}{5}\right)=\ln5+\ln7-\ln5=\ln7\end{aligned}$$

•تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ، ثم استنتاج إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

أي نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1}-1>0$، لدينا

$$\frac{2n+3}{2n+1}-1=\frac{2n+3-(2n+1)}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}>0$$

و منه المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):دراسة اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)-u_n=\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$$

من السؤال السابق لدينا $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ و بما أن الدالة $x\longmapsto \ln x$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$
فإن $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>\ln(1)=0$ و منه $u_{n+1}-u_n>0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

2-(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2n+1$.

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n}=v_n$:

نضع $P(n):e^{u_n}=v_n$

من أجل $n=0$ لدينا : $e^{u_0}=v_0$ أي $e^0=1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n):e^{u_n}=v_n$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1):e^{u_{n+1}}=v_{n+1}$ صحيحة .

لدينا :

$$e^{u_{n+1}}=e^{u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}=e^{u_n}\times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}=e^{u_n}\times\frac{2n+3}{2n+1}$$

و من الفرض لدينا $e^{u_n}=v_n$ و منه

$$e^{u_{n+1}}=e^{u_n}\times\frac{2n+3}{2n+1}=v_n\times\frac{2n+3}{2n+1}=(2n+1)\times\frac{2n+3}{2n+1}=2n+3=v_{n+1}$$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n):e^{u_n}=v_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $e^{u_n}=v_n$ و منه $\ln e^{u_n}=\ln v_n$ إذن $u_n=\ln v_n=\ln(2n+1)$

و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(2n+1)=+\infty$

3-حساب المجموعين S_n و T: من خواص اللوغاريتم لدينا

$$S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)=\ln\left(\frac{\cancel{v_1}}{v_0}\times\frac{\cancel{v_2}}{\cancel{v_1}}\times\frac{\cancel{v_3}}{\cancel{v_2}}\times\cdots\times\frac{v_n}{\cancel{v_{n-1}}}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right)=\ln\left(\frac{2n+1}{1}\right)=\ln(2n+1)$$

•حساب T:

لدينا $e^{u_n}=v_n$ إذن بالتعويض في T نجد :

$$T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+\cdots+e^{u_{2018}}=v_{1439}+v_{1440}+\cdots+v_{2018}$$

و كون (v_n) متتالية حسابية فإن

$$T=\frac{2018-1439+1}{2}\times(v_{1439}+v_{2018})=\frac{580}{2}\times(2\times1439+1+2\times2018+1)=2005640$$

إضغط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 15

-1

أ) برهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$:

نضع $P(n) : u_n > 1$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 > 1$ أي $13 > 1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : u_n > 1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} > 1$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n > 1$ و منه $\frac{1}{5} u_n > \frac{1}{5}$ أي $\frac{1}{5} u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$ إذن $u_{n+1} > 1$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n > 1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتاج أنها متقاربة :دراسة اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + \frac{4}{5} - u_n = \frac{u_n + 4 - 5u_n}{5} = \frac{4 - 4u_n}{5} = \frac{4\,(1 - u_n)}{5} < 0$$

لأن من السؤال السابق لدينا $u_n > 1$ و منه $1 - u_n < 0$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل $(u_n > 1)$ فهي متقاربة.

-2 (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$

•إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية مع تعيين أساسها وحدها الأول :لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(\frac{1}{5} u_n + \frac{4}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{5} u_n - \frac{1}{5}\right) \\ &= \ln\left[\frac{1}{5}(u_n - 1)\right] = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + v_n \end{aligned}$$

و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ و حدها الأول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 12$

-3 كتابة v_n بدلالة n ثم بيّن أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$:

(v_n) متتالية حسابية و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n = v_0 + nr = \ln 12 + n \times \ln\left(\frac{1}{5}\right) = \ln 12 + \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n$

و من جهة لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$ أي $e^{v_n} = e^{\ln(u_n - 1)} = u_n - 1$ و منه

$$u_n = e^{v_n} + 1 = e^{\ln 12 + \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n} + 1 = e^{\ln 12} \times e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)^n} + 1 = 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = \frac{12}{5^n} + 1$$

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ **لدينا:** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{12}{5^n}+1\right)=1$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{12}{5^n}=0$

4- تبيان أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0-1)\times(u_1-1)\times\cdots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$:

نضع: $S_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\cdots\times(u_n-1)$

لدينا مما سبق $v_n=\ln(u_n-1)$ أي $e^{v_n}=e^{\ln(u_n-1)}=u_n-1$ بالتعويض في S_n

$$\begin{aligned}S_n&=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\cdots\times(u_n-1)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\cdots\times e^{v_n}\\&=e^{v_0+v_1+\cdots+v_n}=e^{T_n}\end{aligned}$$

T_n هو مجموع متتالية حسابية و منه :

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{n+1}{2}\times(v_0+v_n)=\frac{n+1}{2}\times\left(\ln 12+\ln 12+\ln\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)\\&=\frac{n+1}{2}\times\left(2\ln 12+\ln\left(\frac{1}{5^n}\right)\right)=\frac{n+1}{2}\times\left(\ln\left(12^2\right)+\ln\left(\frac{1}{5^n}\right)\right)\\&=\frac{n+1}{2}\times\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)=\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}=\ln\left(\frac{12^1}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

إذن

$$S_n=e^{T_n}=e^{\ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}}=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

و منه المطلوب.

حل التمرين 16

إضعط للعودة إلى التمرين

-1

أ) تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$:

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[4;7[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\left(\sqrt{x+2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}>0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

ب) استنتاج أنّه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإنّ $f(x)\in[4;7[$:

معناه نثبت أنه إذا كان $4\le x<7$ فإن $4\le f(x)<7$

لدينا $4 \leq x < 7$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$

فإن $f(4) \leq f(x) < f(7)$ و منه $4 \leq \sqrt{6}+4 \leq f(x) < 7$

2- برهان أنّه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإنّ: $f(x)-x = \dfrac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$:لدينا

$$f(x)-x = \sqrt{x+2}+4-x = \frac{\left(\sqrt{x+2}+(4-x)\right)\left(\sqrt{x+2}-(4-x)\right)}{\sqrt{x+2}-(4-x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}^2-(4-x)^2}{\sqrt{x+2}-(4-x)} = \frac{x+2-(16+x^2-8x)}{\sqrt{x+2}-4+x} = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

• استنتاج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإنّ: $f(x)-x>0$:

لدينا $4 \leq x < 7$ و منه $x-4 \geq 0$ أي $x-4+\sqrt{x+2}>0$ إذن يكفي إثبات أن $-x^2+9x-14>0$ على المجال $[4;7[$

لدينا $\Delta = b^2-4ac = 81-4(-1)(-14) = 25$ و منه $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9+5}{-2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9-5}{-2} = 7 \end{cases}$

ومنه حلول المعادلة $-x^2+9x-14=0$ هي $S=\{2;7\}$ و جدول الاشارة كالآتي :

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$-x^2+9x-14$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن من الجدول نلاحظ أن $-x^2+9x-14>0$ على المجال $[4;7[$ و بالتالي $f(x)-x>0$

3- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$:

نضع $P(n): 4 \leq u_n < 7$

من أجل $n=0$ لدينا : $4 \leq u_0 < 7$ أي $4 \leq 4 < 7$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n): 4 \leq u_n < 7$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1): 4 \leq u_{n+1} < 7$ صحيحة .

لدينا من الفرض $4 \leq u_n < 7$ و كون الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$

فإن $f(4) \leq f(u_n) < f(7)$ أي $4 \leq \sqrt{6}+4 \leq u_{n+1} < 7$ إذن $4 \leq u_{n+1} < 7$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): 4 \leq u_n < 7$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم تبيان أنها متقاربة : دراسة اشارق الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n$ و $4 \leq u_n < 7$ و نعلم مما سبق أن $f(x)-x>0$ على المجال $[4;7[$

و منه نستنتج أن $u_{n+1}-u_n>0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$
و من جهة بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى $(u_n<7)$ فهي متقاربة.

4-

أ) تبيان أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$:لدينا

$$7-u_{n+1}=7-\left(\sqrt{u_n+2}+4\right)=3-\sqrt{u_n+2}=\frac{\left(3-\sqrt{u_n+2}\right)\left(3+\sqrt{u_n+2}\right)}{3+\sqrt{u_n+2}}$$
$$=\frac{3^2-\sqrt{u_n+2}^2}{3+\sqrt{u_n+2}}=\frac{9-(u_n+2)}{3+\sqrt{u_n+2}}=\frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}}$$

لدينا $7>u_n\geq 4$ أي $9>u_n+2\geq 6$ تكافئ $3>\sqrt{u_n+2}\geq\sqrt{6}$ تكافئ $6>3+\sqrt{u_n+2}\geq\sqrt{6}+3$
و منه $6>3+\sqrt{u_n+2}\geq\sqrt{6}+3$ أي $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{\sqrt{6}+3}\leq\frac{1}{3+\sqrt{u_n+2}}<\frac{1}{6}$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد الموجب $(7-u_n)$ نجد $\frac{(7-u_n)}{4}\leq\frac{(7-u_n)}{3+\sqrt{u_n+2}}<\frac{(7-u_n)}{6}$ و منه $7-u_{n+1}\leq\frac{(7-u_n)}{4}$

ب) استنتاج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq 7-u_n\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$:نستعمل البرهان بالتراجع
نضع $Q(n):0\leq 7-u_n\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا : $0\leq 7-u_0\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^0$ أي $0\leq 3\leq 3$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .

نفرض أن $Q(n):0\leq 7-u_n\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1):0\leq 7-u_{n+1}\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0\leq 7-u_n\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد $\frac{1}{4}$
نجد $\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n 3\geq (7-u_n)\times\frac{1}{4}\geq 0$ أي $0\leq\frac{1}{4}(7-u_n)\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ و من السؤال السابق
نحصل على $0\leq 7-u_{n+1}\leq\frac{1}{4}(7-u_n)\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$
و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n):0\leq 7-u_n\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

•**حساب** $\lim_{n\to+\infty}u_n$:
لدينا من السؤال السابق $0\leq 7-u_n\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و بإدخال النهاية على أطراف المتراجحة

$$0\leq\lim_{n\to+\infty}7-u_n\leq\lim_{n\to+\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n\le 0$ $0\le 7-$ أي $7-\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ و منه $\lim_{n\to+\infty}u_n=7$

حل التمرين 17

إضغط للعودة إلى التمرين

1-برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=-4$:

نضع $P(n):u_n=-4$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=-4$ أي $-4=-4$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n):u_n=-4$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1):u_{n+1}=-4$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n=-4$ بضرب المساواة بالعدد $\frac{3}{4}$ نجد $\frac{3}{4}u_n=-\frac{3}{4}\times 4=-3$

و منه $\frac{3}{4}u_n-1=-4$ إذن $u_{n+1}=-4$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n):u_n=-4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+4$

أ) إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$:لدينا

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{3}{4}u_n-1+4=\frac{3}{4}u_n+3=\frac{3}{4}(u_n+4)=\frac{3}{4}v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ و حدها الأول $v_0=u_0+4=\alpha+4$

ب) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة :

لدينا (v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n=v_0\times q^n=(\alpha+4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

و لدينا $v_n=u_n+4$ أي $u_n=v_n-4=(\alpha+4)\left(\frac{3}{4}\right)^n-4$

تبيان أن (u_n) **متقاربة:** حتى نبين أن (u_n) متقاربة يكفي حساب نهايتها

بما أن $-1<\frac{3}{4}<1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[(\alpha+4)\left(\frac{3}{4}\right)^n-4\right]=-4$$

و منه المتتالية (u_n) متقاربة.

ب) حساب S_n بدلالة n و α ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$: لدينا $v_n = u_n + 4$ و منه $u_n = v_n - 4$ بالتعويض في عبارة S_n نجد :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \cdots + (v_n - 4)$$
$$= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{T_n} - 4\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1 \text{مرة}} = T_n - 4(n+1)$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية و بالتالي

$$T_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (\alpha + 4) \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$$
$$= (\alpha + 4) \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4(\alpha + 4)\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

و منه

$$S_n = 4(\alpha + 4)\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1)$$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$: لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 4(\alpha + 4)\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1) = 4(\alpha + 4) - \infty = -\infty$$

حل التمرين 18

إضغط للعودة إلى التمرين

1- حساب u_1 و u_2 ، ثم تخمين إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) لدينا:

$$u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$$
$$u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3 - 2 + 3 = 10$$

التخمين: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - n + 1$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 و تعيين حدها الأول :لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) + 1 = u_{n+1} - n = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 \\ &= 3(u_n - n + 1) = 3v_n \end{aligned}$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا (v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$

و لدينا $v_n = u_n - n + 1$ و منه $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$

جـ) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :دراسة اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \\ &= 2(3^n + n - 1) - 2n + 3 = 2 \times 3^n + 1 > 0 \end{aligned}$$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$:

لدينا $v_n = u_n - n + 1$ أي $u_n = v_n + n - 1$ بالتعويض في S_n نجد

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + n - 1) + (v_1 + n - 1) + \cdots + (v_n + n - 1) \\ &= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{T_n} + \underbrace{(0 + 1 + \cdots + n)}_{W_n} - \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1\text{مرة}} = T_n + W_n - (n+1) \end{aligned}$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية و بالتالي

$$T_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

و W_n هو مجموع متتالية حسابية حدها الأول 1 و عدد حدودها n أي $W_n = \frac{n(n+1)}{2}$

و منه

$$\begin{aligned} S_n &= T_n + W_n - (n+1) = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n - 1 \\ &= \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1 + n^2 + n - 2n - 2) = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3) \end{aligned}$$

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{n+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\,(n-1) = +\infty$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + n^2 - n - 3\right) = +\infty$

حل التمرين 19

إضغط للعودة إلى التمرين

1-تبيان أن المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها r وحدها الأول u_0 :لدينا

$$u_{n+1} = -4\,(n+1) + 3 = -4n - 4 + 3 = -4n + 3 - 4 = u_n - 4$$

و منه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -4$ وحدها الأول $u_0 = 3$.

2-من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -2n^2 + n + 3$:

S_n مجموع متتالية حسابية و بالتالي

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n-0+1}{2} \times (u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2} \times (3 - 4n + 3) =$$
$$= \frac{n+1}{2} \times (6 - 4n) = (n+1)\,(3-2n) = -2n^2 + n + 3$$

ب) تعيين قيمة العدد طبيعي n حيث : $S_n = -30132$:

لدينا $S_n = -30132$ أي $-2n^2 + n + 3 = -30132$ و منه $-2n^2 + n + 30135 = 0$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4\,(-2)\,(30135) = 241081$ و منه

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + 491}{-4} = -\dfrac{245}{2} \notin \mathbb{N} \\ n_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - 491}{-4} = 123 \end{cases}$$

و منه قيمة العدد طبيعي n حيث : $S_n = -30132$ هي $n = 123$

3-المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = ln(v_n)$

أ) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

لدينا $u_n = ln(v_n)$ أي $e^{u_n} = e^{ln(v_n)} = v_n$ و منه $v_n = e^{u_n} = e^{-4n+3}$

ب) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4} :لدينا

$$v_{n+1}=e^{u_{n+1}}=e^{u_n-4}=e^{u_n}\times e^{-4}=e^{-4}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=e^{-4}$ و حدها الأول $v_0=e^{u_0}=e^3$

4-حساب S'_n بدلالة n: من خواص اللوغاريتم و كون أن $v_n=e^{u_n}$ لدينا

$$\begin{aligned}
S'_n&=\ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\cdots+\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\
&=\ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\times v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\
&=\ln\left[v_0\times v_1\times\cdots\times v_n\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\
&=\ln\left[v_0\times v_1\times\cdots\times v_n\times\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\times\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)\times\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\cancel{n+1}}{n+2}\right)\right]\\
&=\ln\left[e^{u_0}\times e^{u_1}\times\cdots\times e^{u_n}\times\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]=\ln\left[e^{u_0+u_1+\cdots+u_n}\times\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]=\ln\left[e^{S_n}\times\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]\\
&=\ln e^{S_n}+\ln\left(\frac{1}{n+2}\right)=S_n+\ln\left(\frac{1}{n+2}\right)=-2n^2+n+3+\ln\left(\frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

حل التمرين 20

إضغط للعودة إلى التمرين

1-برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$:

نضع $P(n):u_n<3$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0<3$ أي $3>0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n):u_n<3$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1):u_{n+1}<3$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n<3$ أي $u_n+5<8$ بضرب المتراجحة بالعدد $\frac{3}{8}$ نجد $\frac{3}{8}(u_n+5)<8\times\frac{3}{8}$ ، و منه $u_{n+1}<3$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n):u_n<3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-تبيان أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتاج أنّها متقاربة: ندرس إشارة الفرق

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3}{8}(u_n+5)-u_n=\frac{3u_n+15-8u_n}{8}=\frac{15-5u_n}{8}=\frac{5}{8}(3-u_n)>0$$

لأنه من السؤال السابق لدينا $u_n<3$ أي $3-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى $(u_n<3)$ فهي متقاربة.

3-المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3(3-u_n)$

أ) حساب v_0 ثم تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$:

لدينا $v_0 = 3(3-u_0) = 3(3-0) = 9$

و لدينا

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(3-u_{n+1})}{3(3-u_n)} = \frac{3-u_{n+1}}{3-u_n} = \frac{3-\frac{3}{8}(u_n+5)}{3-u_n}$$
$$= \frac{\frac{24-3u_n-15}{8}}{3-u_n} = \frac{9-3u_n}{8(3-u_n)} = \frac{3(1-u_n)}{8(3-u_n)} = \frac{3}{8}$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{8}$

ب) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n = v_0 \times q^n = 9 \times \left(\frac{3}{8}\right)^n$

و لدينا $v_n = 3(3-u_n) = 9 - 3u_n$ أي $3u_n = 9 - v_n$ و منه

$$u_n = \frac{9-v_n}{3} = \frac{9-9\times\left(\frac{3}{8}\right)^n}{3} = \frac{3\left(3-3\times\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)}{3} = 3-3\times\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{3}{8} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3-3\times\left(\frac{3}{8}\right)^n = 3$

4- حساب P_n بدلالة n :

لدينا $v_n = 3(3-u_n)$ و منه $3 - u_n = \frac{v_n}{3}$ و بالتعويض في عبارة P_n نجد:

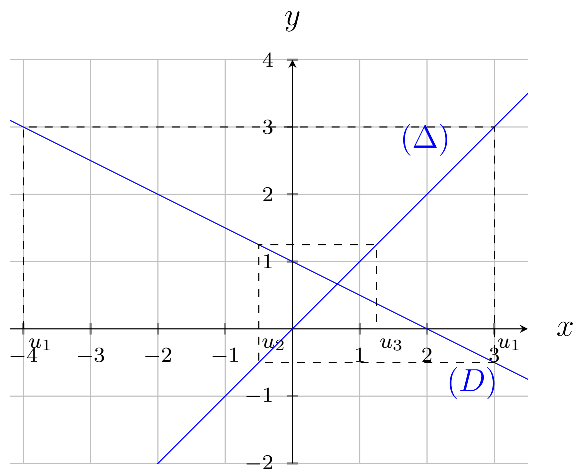
$$P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n) = \frac{v_0}{3}\times\frac{v_1}{3}\times\cdots\times\frac{v_n}{3}$$
$$= \frac{1}{3^{n+1}}(v_0\times v_1\times\cdots\times v_n) = \frac{1}{3^{n+1}}\left[9\times\left(\frac{3}{8}\right)^0\times 9\times\left(\frac{3}{8}\right)^1\times\cdots\times 9\times\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{3^{n+1}}\left[9^{n+1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^0\times\left(\frac{3}{8}\right)^1\times\cdots\times\left(\frac{3}{8}\right)^n\right] = \frac{1}{3^{n+1}}\left[9^{n+1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{0+1+\cdots+n}\right]$$
$$= \frac{(3\times 3)^{n+1}}{3^{n+1}}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{3^{n+1}\times 3^{n+1}}{3^{n+1}}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{n+1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

لاحظ أن $0+1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

حل التمرين 21

إضغط للعودة إلى التمرين

1- تمثيل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :



2-

أ) دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأنه من التمثيل نلاحظ أن $u_0 < u_1$ و $u_2 < u_1$

ب) تخمين حول تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (D)

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب v_0: لدينا

$$v_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}u_n + 1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}\right)^2$$
$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(u_n - \frac{2}{3}\right)\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0 = \left(u_0 - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(-4 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتاج أن (u_n) متقاربة. :

المتتالية (v_n) هندسية و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n = v_0 \times q^n = \frac{196}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

بما أن $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{196}{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

- استنتاج أن (u_n) متقاربة :

لدينا $v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$ و بادخال النهاية نجد

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

معناه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$

و منه (u_n) متتالية متقاربة.

4- تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$:

لاحظ أن الجداء $v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ متكون من n حد، لدينا

$$\begin{aligned} v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_{n-1} &= \frac{196}{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\frac{196}{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\cdots\times\frac{196}{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{196}{9}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^{\overbrace{0+1+\cdots+n-1}^{S_n}} = \left(\frac{14^2}{3^2}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^{S_n} \end{aligned}$$

S_n هو مجموع متتالية حسابية حدها الأول 0 و عدد حدودها n و منه $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ و بالتالي :

$$v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \left(\frac{14^2}{3^2}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{n(n-1)} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$$

حل التمرين 22

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) تعيين u_1 والأساس q للمتتالية (u_n) :

بما أن (u_n) هندسية إذن من الوسط الهندسي لدينا $u_0 \times u_2 = u_1^2$ و منه بالمطابقة نجد $u_1^2 = e^2$ و بما أن (u_n) موجبة فإن $u_1 = e$

- تعيين الأساس :

بما أن (u_n) هندسية إذن $u_7 = u_1 \times q^6$ و لدينا $\ln u_1 + \ln u_7 = -4$ أي $\ln(u_1 \times u_7) = -4$ تكافئ $u_1 \times u_7 = e^{-4}$

و منه $u_1 \times u_1 \times q^6 = e^{-4}$ أي $u_1^2 \times q^6 = e^{-4}$ إذن

$$q^6 = \frac{e^{-4}}{u_1^2} = \frac{e^{-4}}{e^2} = \frac{1}{e^6}$$

و منه $q = \frac{1}{e}$ (الأساس موجب لأنه حدود المتتالية موجبة)

ب) التحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = e^{2-n}$:

(u_n) هندسية و بالتالي :

$$u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1} = e \times \frac{1}{e^{n-1}} = e \times e^{1-n} = e^{1+1-n} = e^{2-n}$$

2- حساب بدلالة n ، المجموع S_n :

لدينا (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ و حدها الأول: لدينا $u_1 = u_0 \times q$ و منه $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{e}{\frac{1}{e}} = e^2$ إذن

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}}$$

$$= e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{e-1}{e}} = e^3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{e-1} = \frac{e^3}{e-1}\left[1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$$

3-نعتبر المتتالية العدديّة (v_n) المعرّفة بـ: $v_0 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = v_n + u_n$

أ) برهان بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$:

نضع $P(n) : v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$

من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = \frac{e^3 - e^4}{1-e}$ أي $e^3 = \frac{e^3(1-e)}{1-e}$ أي $e^3 = e^3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : v_{n+1} = \frac{e^{3-(n+1)} - e^4}{1-e} = \frac{e^{2-n} - e^4}{1-e}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$ إذن

$$v_{n+1} = v_n + u_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e} + e^{2-n} = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e} + \frac{(1-e)\,e^{2-n}}{1-e}$$
$$= \frac{e^{3-n} - e^4 + e^{2-n} - e^{3-n}}{1-e} = \frac{e^{2-n} - e^4}{1-e}$$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): v_n = \dfrac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أن (v_n) متقاربة. : لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{3-n}-e^4}{1-e} = \frac{-e^4}{1-e} = \frac{e^4}{e-1}$$

لأن $\lim_{n\to+\infty} e^{3-n} = 0$ و منه المتتالية (v_n) متقاربة.

-4

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}(u_n - e^3)$:لدينا

$$v_n = \frac{e^{3-n}-e^4}{1-e} = \frac{e\times e^{2-n}-e^4}{1-e} = \frac{e\times u_n - e^4}{1-e} = \frac{e}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$$

إذن : $\frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$

ب) التحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n = \frac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)\,e^3\right]$:

حسب السؤال السابق لدينا

$$S'_n = \frac{1}{e}v_0 + \frac{1}{e}v_1 + \cdots + \frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}\left(u_0 - e^3\right) + \frac{1}{1-e}\left(u_1 - e^3\right) + \cdots + \frac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$$
$$= \frac{1}{1-e}\left[u_0 + u_1 + \cdots + u_n - \underbrace{\left(e^3 + e^3 + \cdots + e^3\right)}_{n+1\text{مرة}}\right] = \frac{1}{1-e}\left[S_n - e^3\,(n+1)\right]$$

حل التمرين 23

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) برهان بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n \le \frac{1}{2}$:

نضع $P(n): 0 < u_n \le \frac{1}{2}$

من أجل $n=0$ لدينا : $0 < u_0 \le \frac{1}{2}$ أي $0 < \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n): 0 < u_n \le \frac{1}{2}$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1): 0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 < u_n \le \frac{1}{2}$ أي $-\frac{1}{2} \le -u_n < 0$ تكافئ $\frac{3}{2} \le 2-u_n < 2$ تكافئ $\frac{2}{3} \ge \frac{1}{2-u_n} > \frac{1}{2}$

أي $\frac{4}{3} \leq \frac{2}{2-u_n} < 1$ و منه $-1+\frac{4}{3} \leq -1+\frac{2}{2-u_n} < -1+1$ و منه $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. :لدينا

$$u_{n+1}-u_n = -1+\frac{2}{2-u_n}-u_n = \frac{-(2-u_n)+2-u_n(2-u_n)}{2-u_n} = \frac{u_n^2-u_n}{2-u_n} = \frac{u_n(u_n-1)}{2-u_n}$$

من البرهان بالتراجع لدينا $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ و منه $\begin{cases} -1 < u_n - 1 \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \leq 2-u_n < 2 \end{cases}$

إذن $u_{n+1}-u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{2-u_n} < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2-نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

أ) إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم كتابة عبارة v_n بدلالة n :لدينا

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = d\frac{1}{-1+\frac{2}{2-u_n}} - 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$
$$= \frac{2}{u_n} - \frac{u_n}{u_n} - 1 = \frac{2}{u_n} - 1 - 1 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) = 2v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2-1 = 1$

و منه عبارة الحد العام هي $v_n = v_0 \times q^n = 2^n$

ب) استنتاج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{2^n+1}$ ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ أي $v_n + 1 = \frac{1}{u_n}$ و منه $u_n = \frac{1}{v_n+1} = \frac{1}{2^n+1}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:** لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

4-حساب S_n بدلالة n ثم تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 2^{n+1}+n$:

لدينا (v_n) هندسية و بالتالي

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$$

و من جهة لدينا $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ أي $\frac{1}{u_n} = v_n + 1$ و منه

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n} = v_0 + 1 + v_1 + 1 + \cdots + v_n + 1 \\ &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1\text{مرة}} = S_n + n + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 + n + 1 = 2^{n+1} + n \end{aligned}$$

حل التمرين 24

إضغط للعودة إلى التمرين

1-

أ) برهان بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 5$:

نضع $P(n) : u_n < 5$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 < 5$ أي $0 < 5$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : u_n < 5$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} < 5$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n < 5$ أي $\frac{4}{5}u_n < \frac{4}{5} \times 5 = 4$ و منه $\frac{4}{5}u_n + 1 < 4 + 1$ إذن $u_{n+1} < 5$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n < 5$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{5}u_n = \frac{1}{5}(5 - u_n)$$

من البرهان بالتراجع لدينا $u_n < 5$ و منه $5 - u_n > 0$

إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(5 - u_n) > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2- نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 5$

أ) إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ و تعيين حدها الأول v_0 لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{4}{5}u_n + 1 - 5 = \frac{4}{5}u_n - 4 = \frac{4}{5}(u_n - 5) = \frac{4}{5}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{4}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 5 = -5$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$

و من جهة لدينا $v_n = u_n - 5$ أي $u_n = v_n + 5$ و منه $u_n = -5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

جـ) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{4}{5} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 5 = 5$

4-حساب S_n بدلالة n ثم تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$:

لدينا (v_n) متتالية هندسية و بالتالي

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -5 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}$$

$$= -5 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}} = -25 \times \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = 25\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1\right)$$

و لدينا من جهة $v_n = u_n - 5$ أي $u_n = v_n + 5$ و منه بالتعويض نجد:

$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 5 + v_1 + 5 + \cdots + v_n + 5$$

$$= v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \underbrace{5+5+\cdots+5}_{n+1\text{ مرة}} = S_n + 5(n+1)$$

$$= 25\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1\right) + 5(n+1) = 25\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 25 + 5n + 5$$

$$= 25 \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - 20 + 5n = 20 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - 20 + 5n = 20\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1\right) + 5n$$

حل التمرين 25

إضغط للعودة إلى التمرين

1- حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم برهان بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n \leq 2$:

لدينا

$$u_1 = \frac{4-u_0}{2+u_0} = \frac{4-0}{2+0} = 2$$
$$u_2 = \frac{4-u_1}{2+u_1} = \frac{4-2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$u_3 = \frac{4-u_2}{2+u_2} = \frac{4-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$$

نضع $P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 2$ أي $0 \leq 0 \leq 2$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 0 \leq u_{n+1} \leq 2$ صحيحة .

لاحظ أنه يمكن كتابة u_{n+1} على الشكل الآتي

$$u_{n+1} = \frac{4-u_n}{2+u_n} = \frac{4+2-2-u_n}{2+u_n} = \frac{6-(2+u_n)}{2+u_n} = \frac{6}{2+u_n} - \frac{2+u_n}{2+u_n} = \frac{6}{2+u_n} - 1$$

لدينا من الفرض $0 \leq u_n \leq 2$ أي $2 \leq u_n + 2 \leq 4$ تكافئ $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n+2} \geq \frac{1}{4}$ تكافئ $3 \geq \frac{6}{u_n+2} \geq \frac{3}{2}$ أي

$\frac{3}{2} - 1 \leq \frac{6}{u_n+2} - 1 \leq 3 - 1$ و منه $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$

أ) إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ ثم كتابة عبارة v_n بدلالة n لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+4} = \frac{\frac{4-u_n}{2+u_n} - 1}{\frac{4-u_n}{2+u_n} + 4} = \frac{\frac{4-u_n-(2+u_n)}{2+u_n}}{\frac{4-u_n+4(2+u_n)}{2+u_n}}$$
$$= \frac{2-2u_n}{12+3u_n} = \frac{-2}{3} \times \frac{u_n-1}{u_n+4} = -\frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+4} = -\frac{1}{4}$

و بالتالي عبارتها من الشكل $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

ب) تبيان أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5}{1-v_n} - 4$ ثم حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 4}$ و منه $v_n(u_n+4) = u_n - 1$ تكافئ $v_n u_n + 4v_n - u_n = -1$
أي $u_n(v_n - 1) = -1 - 4v_n$ و منه

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-1-4v_n}{v_n-1} = \frac{1+4v_n}{1-v_n} = \frac{1+4-4+4v_n}{1-v_n} = \frac{5-4(1-v_n)}{1-v_n} \\ &= \frac{5}{1-v_n} - \frac{4(1-v_n)}{1-v_n} = \frac{5}{1-v_n} - 4 \end{aligned}$$

• **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:** بما أن $-1 < -\dfrac{2}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ و بالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{1-v_n} - 4 = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{1+\frac{1}{4}(-\frac{2}{3})^n} - 4 = \frac{5}{1} - 4 = 1$$

4-حساب S_n بدلالة n ثم استنتاج T_n بدلالة n :

S_n مجموع متتالية هندسية عدد حدودها $n + 2024 - n + 1 = 2025$ و حدها الأول v_n و منه

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2024} = v_n \times \frac{1-q^{2025}}{1-q} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{2025}}{1+\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2025}}{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2025}\right) = -\frac{3}{20}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2025}\right)$$

لدينا $u_n = \dfrac{5}{1-v_n} - 4$ و منه $4 + u_n = \dfrac{5}{1-v_n}$ إذن $\dfrac{1-v_n}{5} = \dfrac{1}{4+u_n}$ و منه

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{4+u_n} + \frac{1}{4+u_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{4+u_{n+2024}} = \frac{1-v_n}{5} + \frac{1-v_{n+1}}{5} + \cdots + \frac{1-v_{n+2024}}{5} \\ &= \frac{1}{5}\left[\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2025} - (v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2024})\right] = \frac{1}{5}(2025 - S_n) \\ &= \frac{1}{5}\left(2025 + \frac{3}{20}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2025}\right)\right) = 405 + \frac{3}{100}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2025}\right) \end{aligned}$$

حل التمرين 26

إضغط للعودة إلى التمرين

1- تشكيل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتاج أنّه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ فإنّ $\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{4}$:

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $]2;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(2x)-(2x)'(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x-2x-2}{4x^2} = -\frac{2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2} < 0$$

و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]2;+\infty[$ ، و جدول تغيراتها كالآتي: لدينا $f(0) = \frac{3}{4}$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\frac{3}{4}$ $\searrow$ $\frac{1}{2}$

من جدول التغيرات نستنتج أنّه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ فإنّ $\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{4}$

2- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، $n \geq 2$: $u_n = \frac{n}{2^n}$

أ) تبيان أنّه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإنّ: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$:

لدينا

$$\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{\frac{n+1}{2^n\times 2}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \frac{n+1}{2n} = f(n)$$

إذن حسب السؤال السابق $\frac{n+1}{2n} \leq \frac{3}{2}$ من أجل كل $n \geq 2$

ب- إثبات أنّه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإنّ: $u_n \leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ ثم استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا حسب السؤال السابق و بالتعويض بكل n حيث $n \geq 2$ نجد $\begin{cases} \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{3}{4} \\ \frac{u_4}{u_3} \leq \frac{3}{4} \\ \vdots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{3}{4} \end{cases}$ و بضرب أطراف المتراجات طرف لطرف نجد : $\frac{\cancel{u_3}}{u_2} \times \frac{\cancel{u_4}}{\cancel{u_3}} \times \cdots \times \frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3+1}$

أي $\frac{u_n}{u_2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ و منه $u_n \leq u_2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = 0$ و لدينا من جهة $0 < u_n \leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

إذن $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = 0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

جـ تبيان أنّ: $S_n = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ ثم تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = \frac{511}{1024}$:

لدينا

$$S_n = \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3}\cdots + \frac{u_n}{n} = \frac{\frac{2}{2^2}}{2} + \frac{\frac{3}{2^3}}{3} + \cdots + \frac{\frac{n}{2^n}}{n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

و منه S_n مجموع متالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ و عدد حدودها $n-1$ و منه

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

و لدينا من جهة $S_n = \frac{511}{1024}$ تكافئ $\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{511}{1024}$ تكافئ $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1022}{1024}$

أي $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1022}{1024} = \frac{2}{1024}$ و منه $(n-1)\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2}{1024}$

و منه $n\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - \ln 1024$ تكافئ $-n\ln 2 + \ln 2 = \ln 2 - \ln 1024$

إذن $n = \frac{-\ln 1024}{-\ln 2} = 10$

2 -بكالوريات سابقة-شعبة تقني رياضي

حل التمرين 1

إضغط للعودة إلى التمرين

(I

1- تحديد حسب قيم x ، إشارة $f(x)-x$: لدينا

$$f(x)-x=x-\ln(x-1)-x=-\ln(x-1)$$

ندرس اشارة $-\ln(x-1)$ لدينا $-\ln(x-1)=0$ و منه $\ln(x-1)=0$ تكافئ $x-1=e^0=1$ و منه $x=2$

و منه إشارة $-\ln(+x-1)$ تلخص في الجدول الآتي

x	1		2		$+\infty$
$f(x)-x$	||	$+$	0	$-$	

-2

أ) تعيين إتجاه تغيّر الدالة f :

- **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=(x-\ln(x-1))'=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$$

لدينا $x\in]1;+\infty[$ معناه $x>1$ أي $x-1>0$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $x-2$ نلخص الإشارة في الجدول الآتي

x	1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة على المجال $[2;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]1;2]$.

ب) تبيان أنّه إذا كان $x\in[2;e+1]$ فإنّ: $f(x)\in[2;e+1]$:

أي نبين أنه إذا كان $2\leq x\leq e+1$ فإنّ: $2\leq f(x)\leq e+1$ لدينا $2\leq x\leq e+1$ و الدالة f متزايدة على المجال $[2;+\infty[$ و منه $f(2)\leq f(x)\leq f(e+1)$ إذن $2\leq f(x)\leq e\leq e+1$.

II) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e+1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1-برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \in [2; e+1]$:

نضع $P(n) : u_n \in [2; e+1] \overbrace{\equiv}^{\text{تكافؤ}} 2 \le u_n \le e+1$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $2 \le u_0 \le e+1$ أي $2 \le e+1 \le e+1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 2 \le u_n \le e+1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 2 \le u_{n+1} \le e+1$ صحيحة .

لدينا $2 \le u_n \le e+1$ و الدالة f متزايدة على المجال $]2; +\infty[$ و منه $f(2) \le f(u_n) \le f(e+1)$

إذن $2 \le u_{n+1} \le e \le e+1$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $2 \le u_n \le e+1 \overbrace{\equiv}^{\text{تكافؤ}} P(n) : u_n \in [2; e+1]$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2- دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدينا $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ و من السؤال السابق لدينا $2 \le u_n \le e+1$ و نعلم أن $f(x) - x \le 0$ على المجال $]2; +\infty[$ و منه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n \le 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

3-تبرير تقارب المتتالية (u_n) ، ثم حساب نهايتها:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل $(2 \le u_n)$ فهي متقاربة .

•**حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \in \mathbb{R}$

و لدينا $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$ بإدخال النهاية نجد $\ell = \ell - \ln(\ell - 1)$ و منه $\ln(\ell - 1) = 0$ أي $\ell - 1 = e^0 = 1$ إذن $\ell = 2$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

حل التمرين 2

إضغط للعودة إلى التمرين

1- دراسة حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n:

أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

2-نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

أ) تبيان أنّه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$:

من جدول الموافقات للسؤال السابق لدينا من أجل $p = 4k + 2$ فإن $D_p = 5^p \equiv 9[16]$ أي $D_p = 16n + 9 = C_n$ و منه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$.

ب) <u>تعيين n من أجل $p=6$:</u>

من أجل $p=6$ لدينا $C_n = 16n+9 = 15625 = 5^6 = D_6$ أي $16n = 15625 - 9 = 15616$ و منه
$n = \frac{15616}{16} = 976$

3- <u>دراسة تغيرات الدالة f ، ثم استنتاج إشارة $f(x)$:</u>

يمكن كتابة عبارة f على الشكل $f(x) = 5^{4x+2} - 9 = e^{(4x+2)\ln 5} - 9$

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \left(e^{(4x+2)\ln 5} - 9\right)' = 4\ln 5 e^{(4x+2)\ln 5} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

• **استنتاج إشارة** $f(x)$:

لدينا $f(0) = 16$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و منه جدول تغيرات f هو :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$16 \nearrow +\infty$

من جدول تغيرات f نلاحظ أن $f(x) > 0$ على المجال $[0;+\infty[$

4- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

أ) <u>برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$:</u>

نضع $P(n) : u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$

• من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = \frac{5^{4\times 0+2}-9}{16}$ أي $u_0 = 1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

• نفرض أن $P(n) : u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} = \frac{5^{4(n+1)+2}-9}{16}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$ و منه

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} = 5^4\left(\frac{5^{4n+2}-9}{16} + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} \\ &= 5^4\left(\frac{5^{4n+2}}{16}\right) - \frac{9}{16} = \frac{5^{4n+4+2}}{16} - \frac{9}{16} = \frac{5^{4(n+1)+2}-9}{16} \end{aligned}$$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): u_n = \dfrac{5^{4n+2}-9}{16}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ u_n عدد طبيعي.:

مما سبق لدينا من أجل $4n+2$ فإن $5^{4n+2} \equiv 9[16]$ أي $5^{4n+2}-9 \equiv 0[16]$ معناه باقي قسمة $5^{4n+2}-9$ على 16 معدوم إذن $\dfrac{5^{4n+2}-9}{16}$ عدد طبيعي ، و منه u_n عدد طبيعي.

5-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):

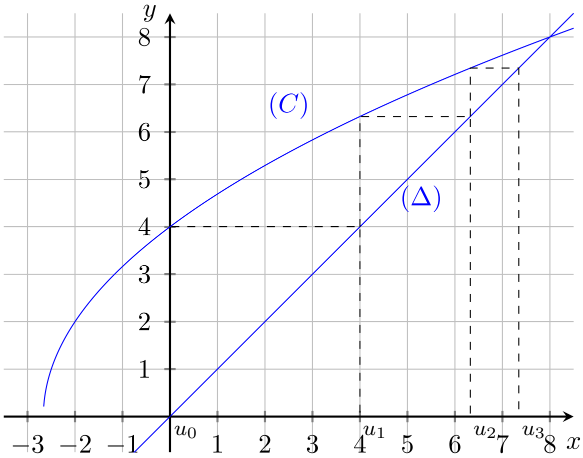
لدينا $u_n = \dfrac{5^{4n+2}-9}{16} = \dfrac{f(n)}{16}$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن $\dfrac{f}{16}$ أيضا متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و بالتالي نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

إضغط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 3

1-

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3:



ب) تخمين حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C) مع (Δ)

2-

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n < 8$:

نضع $P(n): 0 \leq u_n < 8$

- من أجل $n=0$ لدينا : $0 \leq u_0 < 8$ أي $0 \leq 0 < 8$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n): 0 \leq u_n < 8$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1): 0 \leq u_{n+1} < 8$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 \le u_n < 8$ أي $0 \le 6u_n < 48$ و منه $0 \le 6u_n + 16 < 64$ و منه $0 \le$
$\sqrt{6u_n+16} < 8$ إذن $0 \le u_{n+1} < 8$
و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): 0 \le u_n < 8$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$: لدينا: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6u_n+16} - u_n = \frac{\left(\sqrt{6u_n+16} - u_n\right)\left(\sqrt{6u_n+16} + u_n\right)}{\left(\sqrt{6u_n+16} + u_n\right)}$$
$$= \frac{6u_n + 16 - u_n^2}{\sqrt{6u_n+16}+u_n} = \frac{-u_n^2 + 6u_n + 16}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

نحل المعادلة $-u_n^2 + 6u_n + 16 = 0$ لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-1) \times 16 = 100$

و منه
$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+10}{-2} = -2 \\ l_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-10}{-2} = 8 \end{cases}$$
و منه

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 6u_n + 16}{\sqrt{6u_n+16}+u_n} = \frac{-(u_n-8)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n} = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

جـ) استنتاج اتجاه تغيّر (u_n):

لدينا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$ و من البرهان بالتراجع لدينا $0 \le u_n < 8$

أي $\begin{cases} 8 - u_n > 0 \\ u_n + 2 > 0 \\ \sqrt{6u_n+16} + u_n > 0 \end{cases}$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

-3

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$: لدينا

$$8 - u_{n+1} = 8 - \sqrt{6u_n+16} = \frac{\left(8 - \sqrt{6u_n+16}\right)\left(8 + \sqrt{6u_n+16}\right)}{\left(8 + \sqrt{6u_n+16}\right)}$$
$$= \frac{64 - (6u_n+16)}{\left(8 + \sqrt{6u_n+16}\right)} = \frac{48 - 6u_n}{8 + \sqrt{6u_n+16}} = \frac{6(8-u_n)}{8 + \sqrt{6u_n+16}}$$

و لدينا من البرهان بالتراجع $0 \le u_{n+1} < 8$ معناه $0 \le \sqrt{6u_n+16} < 8$ أي $8 \le 8 + \sqrt{6u_n+16} < 16$
تكافئ $\frac{1}{8} \ge \frac{1}{8+\sqrt{6u_n+16}} > \frac{1}{16}$ نضرب أطراف المتراجحة بالعدد الموجب $6(8-u_n) > 0$ نجد

$$\frac{6}{8}(8-u_n) \leq \frac{6(8-u_n)}{8+\sqrt{6u_n+16}} < \frac{6}{16}(8-u_n)$$ و منه

$$0 < \frac{3}{8}(8-u_n) < \frac{6(8-u_n)}{8+\sqrt{6u_n+16}} \leq \frac{3}{4}(8-u_n) \leq \frac{1}{2}(8-u_n)$$

إذن $0 < 8-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8-u_n)$

ب) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < 8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $Q(n) : 0 < 8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- من أجل $n=0$ لدينا : $0 < 8-u_0 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^0$ أي $0 < 8-0 \leq 8$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $Q(n) : 0 < 8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1) : 0 < 8-u_{n+1} \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 < 8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد $\frac{1}{2}$

نجد $\frac{1}{2} \times$ $0 < \frac{1}{2}(8-u_n) \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و من السؤال السابق لدينا $0 < 8-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8-u_n)$

و منه $0 < 8-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8-u_n) \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ إذن $0 < 8-u_{n+1} \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n) : 0 < 8-u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

- إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و بإدخال النهاية على المتراجحة السابقة نجد :

$$0 < 8 - \lim_{n\to+\infty} u_n \leq 0$$

أي $8 - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$

حل التمرين 4

إضغط للعودة إلى التمرين

1-تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$:

- **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[1;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)'=\frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

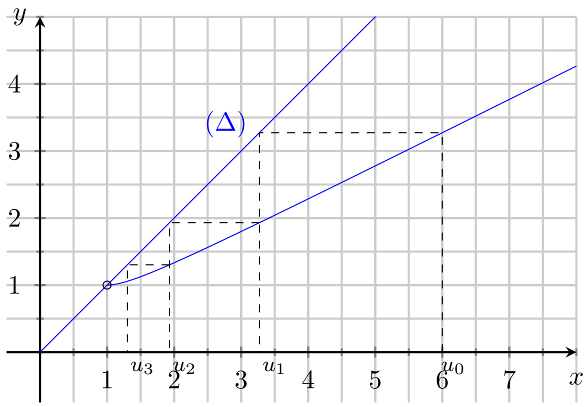
المقام موجب تماما و كون $x\in[1;+\infty[$ فإن $x\geq 1$ أي $x-1\geq 0$ و منه $2x(x-1)\geq 0$ و بالتالي $f'(x)\geq 0$

و منه الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

-2

أ) تمثيل الحدود الأربعة الاولى للمتتالية (u_n):

نستعين بالمنصف (Δ) الذي معادلته $y=x$



ب) تخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها:

المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو فاصلة تقاطع (C_f) مع (Δ) $(x=1)$.

جـ) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 6$: نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $P(n):1\leq u_n\leq 6$

- من أجل $n=0$ لدينا : $1\leq u_0\leq 6$ أي $1\leq 6\leq 6$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n):1\leq u_n\leq 6$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1):1\leq u_{n+1}\leq 6$ صحيحة .

لدينا من الفرض $1\leq u_n\leq 6$ و بما أن الدالة f متزايدة على المجال $[1;6]$ فإن $f(1)\leq f(u_n)\leq f(6)$

و منه $1\leq u_{n+1}\leq \frac{36}{11}\leq 6$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n):1\leq u_n\leq 6$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

د) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n): ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n=\frac{u_n^2-u_n(2u_n-1)}{2u_n-1}=\frac{-u_n^2+u_n}{2u_n-1}=\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$$

و من السؤال السابق لدينا $1 \leq u_n \leq 6$ أي $\begin{cases} 1-u_n \leq 0 \\ 2u_n - 1 \geq 0 \end{cases}$ و منه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

هـ) تبرير تقارب المتتالية (u_n):

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل $(1 \leq u_n)$ ، فهي متقاربة.

3-نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ) برهان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 و تعيين حدّها الأول: لدينا

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2}{2u_n-1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2}{2u_n-1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{u_n^2-2u_n+1}{2u_n-1}}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right) = \ln\left(\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{(u_n-1)^2}{u_n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2 = \ln v_n^2 = 2\ln v_n = 2w_n$$

و منه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و حدّها الأول $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\dfrac{u_0-1}{u_0}\right) = \ln\dfrac{5}{6}$

ب) كتابة w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n:

(w_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي : $w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\dfrac{5}{6}\right) \times 2^n = 2^n \ln\left(\dfrac{5}{6}\right)$

و من جهة لدينا $w_n = \ln(v_n)$ إذن

$$v_n = e^{w_n} = e^{2^n \ln\left(\frac{5}{6}\right)} = e^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}$$

جـ) تبيان أنّ : $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n}$ و منه $v_n u_n - u_n = -1$ أي $u_n(v_n - 1) = -1$ إذن :

$$u_n = \frac{-1}{v_n - 1} = \frac{1}{1 - v_n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$$

بما أن $-1 < \frac{5}{6} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n} = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}} = 1$

4- حساب بدلالة n المجموع التالي: S_n: لدينا

$$S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \cdots + \frac{1}{w_n} = \frac{1}{2^0 \ln\left(\frac{5}{6}\right)} + \frac{1}{2^1 \ln\left(\frac{5}{6}\right)} + \cdots + \frac{1}{2^n \ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \underbrace{\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{T_n} = \frac{T_n}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول 1 و منه

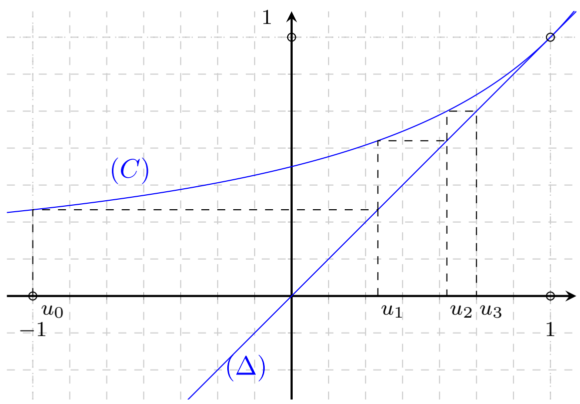
$$T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

إذن
$$S_n = \frac{T_n}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

حل التمرين 5

إضغط للعودة إلى التمرين

1- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3:



المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C) مع المستقيم (Δ) $(x = 1)$.

2-برهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$:

نضع $P(n) : u_n < 1$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 < 1$ أي $-1 < 1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : u_n < 1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} < 1$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n < 1$ و منه $-u_n > -1$ أي $2 - u_n > 1$ إذن $\frac{1}{2-u_n} < 1$ و منه $f(u_n) = u_{n+1} < 1$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n < 1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3-دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتاج أنها متقاربة: ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1 - u_n(2-u_n)}{2-u_n}$$
$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$$

البسط موجب تماما و من البرهان بالتراجع لدينا $u_n < 1$ أي $0 < 1 - u_n$ أي $0 < 1 < 2 - u_n$

و منه $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى $(u_n < 1)$ فهي متقاربة .

4-نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

أ) برهان أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثم تعيين عبارة حدها العام v_n بدلالة n:

لدينا

$$v_{n+1} = \frac{2}{1-u_{n+1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2-u_n}} = \frac{2}{\frac{2-u_n-1}{2-u_n}} = \frac{2(2-u_n)}{1-u_n}$$
$$= \frac{2(1+1-u_n)}{1-u_n} = \frac{2}{1-u_n} + \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = v_n + 2$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = 2$ و حدها الأول $v_0 = \frac{2}{1-u_0} = \frac{2}{1+1} = 1$

و بالتالي عبارة حدها العام هي $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$

ب) استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا $v_n = \frac{2}{1-u_n}$ أي $v_n(1-u_n) = 2$ أي $v_n - v_n u_n = 2$ و منه $v_n u_n = v_n - 2$ إذن

$$u_n = \frac{v_n - 2}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} - \frac{2}{v_n} = 1 - \frac{2}{v_n} = 1 - \frac{2}{1+2n}$$

• حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{1+2n} = 1$

إضغط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 6

-1

أ) تبيان أن ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$:

نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $P(n) : u_n > 0$

• من أجل $n = 1$ لدينا : $u_1 > 0$ أي $\frac{1}{a} > 0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

• نفرض أن $P(n) : u_n > 0$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} > 0$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n > 0$ و بما أن $n > 0$ و $a > 0$ فإن $\frac{n+1}{an} > 0$ و منه $\frac{n+1}{an}u_n > 0$ أي $u_{n+1} > 0$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n > 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{an}u_n - u_n = u_n\left(\frac{n+1}{an} - 1\right) = u_n\left(\frac{n+1-an}{an}\right) = \frac{u_n}{an}(n+1-an)$$

لإثبات أن (u_n) متناقصة تماما يكفي إثبات أن $n+1-an \leq 0$

من المعطيات لدينا $a \geq 2$ أي $-an \leq -2n$ و منه $n+1-an \leq n+1-2n = 1-n$ و بما أن $n \geq 1$ فإن $1-n \leq 0$ و منه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

و بما أنها محدودة من الأسفل $(u_n > 0)$ فهي متقاربة.

-2 نعتبر المتتالية v_n المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an}u_n$.

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ و تعيين حدّها الأول v_1 بدلالة a:

لدينا

$$v_{n+1} = \frac{1}{a(n+1)}u_{n+1} = \frac{1}{a(n+1)}\frac{n+1}{an}u_n = \frac{1}{a}\frac{1}{an}u_n = \frac{1}{a}v_n$$

و منه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{a}$ و حدّها الأول $v_1 = \frac{1}{a}u_1 = \frac{1}{a^2}$

ب) إيجاد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثمّ إستنتاج عبارة u_n و حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} == \frac{1}{a^2} \times \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^{n-1}} = \frac{1}{a^{n+1}}$$

و من جهة لدينا $v_n = \frac{1}{an} u_n$ و منه $u_n = an \times v_n = an \times \frac{1}{a^{n+2}} = \frac{n}{a^{n+1}}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:** لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{n\ln a}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$

-3 حساب بدلالة n و a المجموع S_n ثم تعيين قيمة a حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$:

لدينا $v_n = \frac{1}{an} u_n$ و منه $av_n = \frac{1}{n} u_n$ بالتعويض في المجموع نجد :

$$S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n = av_1 + av_2 + \cdots + av_n$$

$$= a\left(v_1 + v_2 + \cdots + v_n\right) = a\left(v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}\right) = a\left(\frac{1}{a^2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{1-\frac{1}{a^n}}{\frac{a-1}{a}} = \frac{1-\frac{1}{a^n}}{a-1} = \frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)$$

تعيين قيمة a **حيث** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$ **:**

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{a^n}\right) = \frac{1}{a-1} = \frac{1}{2016}$

و منه $a - 1 = 2016$ إذن $a = 2017$.

إضغط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 7

-1

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > \frac{1}{e}$:

نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $P(n) : u_n > \frac{1}{e}$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 > \frac{1}{e}$ أي $\frac{5}{4e} \frac{1}{e}$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : u_n > \frac{1}{e}$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} > \frac{1}{e}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n > \frac{1}{e}$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ فإن $f(u_n) > f\left(\frac{1}{e}\right)$

أي $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n > \frac{1}{e}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{e.u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{e.u_n + 1}$:

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n}{e.u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - u_n(e.u_n + 1)}{e.u_n + 1}$$

$$= \frac{2u_n - eu_n^2 - u_n}{e.u_n + 1} = \frac{u_n - eu_n^2}{e.u_n + 1} = \frac{eu_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{e.u_n + 1}$$

- **استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تبرير أنها متقاربة:**

من السؤال السابق لدينا $u_n > \frac{1}{e}$ أي $\frac{1}{e} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل $(u_n > \frac{1}{e})$ فهي متقاربة .

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \dfrac{e.u_n}{e.u_n - 1}$

إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 و تعيين حدها الأول v_0 و عبارة v_n بدلالة n:

لدينا

$$v_{n+1} = \frac{e.u_{n+1}}{e.u_{n+1} - 1} = \frac{e\frac{2u_n}{e.u_n+1}}{e\dfrac{2u_n}{e.u_n + 1} - 1} = \frac{\dfrac{2eu_n}{e.u_n + 1}}{\dfrac{2eu_n - e.u_n - 1}{e.u_n + 1}} = \frac{2eu_n}{eu_n - 1} = 2v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{e.u_0}{e.u_0 - 1} = \dfrac{\cancel{e}\dfrac{5}{4\cancel{e}}}{e\dfrac{5}{4e} - 1} = 5$

و بالتالي عبارة v_n هي $v_n = v_0 \times q^2 = 5 \times 2^n$

-3

أ) التحقق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \dfrac{1}{e.u_n - 1}$ و استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا

$$v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1} = \frac{e.u_n - 1 + 1}{e.u_n - 1} = \frac{e.u_n - 1}{e.u_n - 1} + \frac{1}{e.u_n - 1} = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$$

و منه $v_n = 1 + \dfrac{1}{e.u_n - 1}$ أي $v_n - 1 = \dfrac{1}{e.u_n - 1}$ إذن $e.u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n - 1}$ و بالتالي

$$u_n = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{v_n - 1} + 1\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{5 \times 2^n - 1} + 1\right)$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{5\times 2^n - 1} + 1\right) = \dfrac{1}{e}$

ب) حساب بدلالة n المجموع S_n:

بما أن (v_n) هندسية إذن :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 5\left(2^{n+1} - 1\right)$$

-4 أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

حل التمرين 8

إضغط للعودة إلى التمرين

-1 اثبات أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{3}$ و تعيين حدها الأوّل:

لدينا $u_{n+1} = 2(3)^{n+1} = 2(3)^n \times 3 = 3u_n$ و منه :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}w_n$$

و منه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{5}{3}$ و حدها الأوّل $w_0 = \dfrac{v_0}{u_0} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

-2 كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$:

لدينا (w_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها من الشكل $w_n = w_0 \times q^n = \dfrac{5}{2} \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = \dfrac{5^{n+1}}{2 \times 3^n}$

و من جهة لدينا $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$ أي $w_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{u_n}$ و منه

$$v_n = \left(w_n - \frac{1}{2}\right) u_n = \left(\frac{5^{n+1}}{2 \times 3^n} - \frac{1}{2}\right) 2 \times 3^n = 5^{n+1} - 3^n$$

-3

-4 أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

حل التمرين 9

إضغط للعودة إلى التمرين

-1 اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية و أساسها و حدها الأول:

لدينا

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3(n+1) + 1 = 7u_n - 18n + 9 - 3n - 3 + 1$$
$$= 7u_n - 21n + 7 = 7(u_n - 3 + 1) = 7v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 7$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 3 \times 0 + 1 = 1$

-2 كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = 7^n$

و من جهة لدينا $v_n = u_n - 3n + 1$ إذن $u_n = v_n + 3n - 1 = 7^n + 3n - 1$

-3 حساب بدلالة n المجموع S_n:لدينا

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 3 \times 0 - 1 + v_1 + 3 \times 1 - 1 + \cdots + v_n + 3n - 1$$
$$= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{T_n} + 3\underbrace{(0 + 1 + 2 + \cdots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} - \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1 \text{ مرة}}$$
$$= T_n + \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = T_n + \frac{(n+1)(3n-2)}{2}$$

T_n مجموع متتالية هندسية و بالتالي

$$T_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - 7^{n+1}}{1 - 7} = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

و منه

$$S_n = T_n + \frac{(n+1)(3n-2)}{2} = \frac{7^{n+1} - 1}{6} + \frac{(n+1)(3n-2)}{2}$$

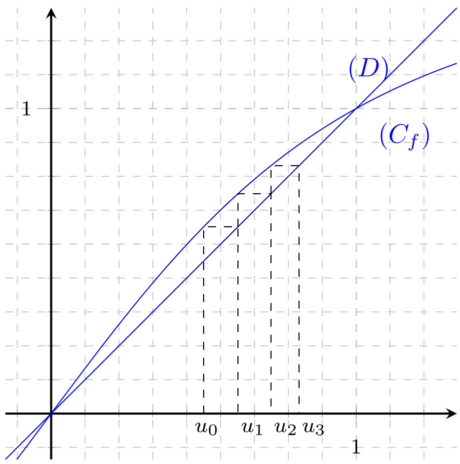
4- أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

حل التمرين 10

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3:



ب) تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D) $(x = 1)$

-2

أ) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$: نضع $P(n) : \frac{1}{2} \leq u_n < 1$

• من أجل $n = 0$ لدينا : $\frac{1}{2} \leq u_0 < 1$ أي $\frac{1}{2} < 1 \leq \frac{1}{2}$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

• نفرض أن $P(n) : \frac{1}{2} \leq u_n < 1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$ صحيحة .

لدينا من الفرض $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ فإن $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq$ $f(u_n) < f(1)$ أي $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2\sqrt{6}} \leq u_{n+1} < 1$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : \frac{1}{2} \leq u_n < 1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتاج أنّها متقاربة: لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}} - u_n = \frac{3u_n - u_n\left(\sqrt{4u_n^2+5}\right)}{\sqrt{4u_n^2+5}} = \frac{u_n\left(3 - \sqrt{4u_n^2+5}\right)}{\sqrt{4u_n^2+5}}$$

المقام موجب و $1 < u_n \leq \frac{1}{2}$ إذن يكفي إثبات أن $3 - \sqrt{4u_n^2+5} > 0$

لدينا $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$ و منه $\frac{1}{4} \leq u_n^2 < 1$ أي $1 \leq 4u_n^2 < 4$ أي $6 \leq 4u_n^2+5 < 9$ و منه

$\sqrt{6} \leq \sqrt{4u_n^2+5} < 3$ إذن $-3 < -\sqrt{4u_n^2+5} \leq -\sqrt{6}$ و بالتالي $0 < 3 - \sqrt{4u_n^2+5} \leq 3 - \sqrt{6}$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

و بما أنها محدودة من الأعلى $(u_n < 1)$ فهي متقاربة.

3- برهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ و تعيين حدها الأول v_0:

لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{1-u_{n+1}^2} = \frac{\left(\frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}}\right)^2}{1-\left(\frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}}\right)^2} = \frac{\frac{9u_n^2}{4u_n^2+5}}{1-\frac{9u_n^2}{4u_n^2+5}}$$

$$= \frac{\frac{9u_n^2}{4u_n^2+5}}{\frac{4u_n^2+5-9u_n^2}{4u_n^2+5}} = \frac{9u_n^2}{5-5u_n^2} = \frac{9}{5}\frac{u_n^2}{1-u_n^2} = 9v_n$$

و منه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{9}{5}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0^2}{1-u_0^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

-4

أ) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

(v_n) هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{9}{5}\right)^n$

و من جهة يمكن كتابة v_n على الشكل

$$v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n^2} = \frac{1-1+u_n^2}{1-u_n^2} = \frac{1-(1-u_n^2)}{1-u_n^2} = \frac{1}{1-u_n^2} - \frac{(1-u_n^2)}{1-u_n^2} = \frac{1}{1-u_n^2} - 1$$

و منه $v_n + 1 = \frac{1}{1-u_n^2}$ أي $1 - u_n^2 = \frac{1}{v_n+1}$ أي $u_n^2 = 1 - \frac{1}{v_n+1}$ و بما أن $u_n > 0$ موجبة فإن

$$u_n = \sqrt{1-\frac{1}{v_n+1}} = \sqrt{1-\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n+1}}$$

ب) حساب نهاية المتتالية (u_n): بما أن $\frac{9}{5} > 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n = +\infty$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n + 1}} = 1$$

حل التمرين 11

إضغط للعودة إلى التمرين

1- برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 < u_n < 2$:

نضع $P(n) : -1 < u_n < 2$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $-1 < u_0 < 2$ أي $-1 < \frac{1}{2} < 2$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : -1 < u_n < 2$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : -1 < u_{n+1} < 2$ صحيحة .

لدينا من الفرض $-1 < u_n < 2$ ومنه $1 < u_n+2 < 4$ تكافئ $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+2} < 1$ تكافئ $-4 < -\frac{4}{u_n+2} < -1$

أي $3 - 4 < 3 - \frac{4}{u_n+2} < 3 - 1$ و منه $-1 < u_{n+1} < 2$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : -1 < u_n < 2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

-2

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$:

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{4}{u_n+2} - u_n = \frac{3(u_n+2) - 4 - u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n+2}$$

المعادلة $-u_n^2 + u_n + 2 = 0$ تقبل حلين لأن $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4\times(-1)\times 2 = 9$

و منه
$$\begin{cases} \ell_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{-2} = -1 \\ \ell_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

إذن $-u_n^2 + u_n + 2 = -(u_n-2)(u_n+1) = (2-u_n)(1+u_n)$ و منه $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

ب) تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتاج أنّها متقاربة:

لدينا من البرهان بالتراجع $-1 < u_n < 2$ و منه $\begin{cases} 2 - u_n > 0 \\ 1 + u_n > 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، و بما أنها محدودة من الأعلى $u_n < 2$ فهي متقاربة.

3- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n = \dfrac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$، حيث α عدد حقيقي.

أ) إيجاد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$، ثمّ حساب حدّها الأول v_0:

لدينا $v_{n+1} = \dfrac{1}{4} v_n$ و منه

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + \alpha}{u_{n+1} + 1} = \frac{3 - \dfrac{4}{u_n + 2} + \alpha}{3 - \dfrac{4}{u_n + 2} + 1} = \frac{3 - \dfrac{4}{u_n + 2} + \alpha}{4 - \dfrac{4}{u_n + 2}}$$

$$= \frac{\dfrac{3(u_n + 2) - 4 + \alpha(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\dfrac{4(u_n + 2) - 4}{u_n + 2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n(\alpha + 3) + 2 + 2\alpha}{(u_n + 2) - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n(\alpha + 3) + 2 + 2\alpha}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{4} v_n$$

أي $\dfrac{u_n + \alpha}{u_n + 1} = v_n = \dfrac{u_n(\alpha + 3) + 2 + 2\alpha}{u_n + 1}$ معناه $u_n + \alpha = u_n(\alpha + 3) + 2 + 2\alpha$ بالمطابقة نجد $\alpha + 3 = 1$ و منه $\alpha = -2$ ، و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{4}$ و حدّها الأول $-1 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = v_0$ و بالتالي عبارتها هي: $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

ب) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \dfrac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}$ ثمّ حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

لدينا $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ و منه $v_n(u_n + 1) = u_n - 2$ أي $v_n u_n + v_n - u_n = -2$

أي $u_n(v_n - 1) = -2 - v_n$ إذن $u_n = \dfrac{2 + v_n}{1 - v_n} = \dfrac{2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$

و بما أن $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ و منه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

إضغط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 12

-1

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < \frac{9}{2}$:

نضع $P(n) : u_n < \frac{9}{2}$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 < \frac{9}{2}$ أي $3 < \frac{9}{2}$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : u_n < \frac{9}{2}$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} < \frac{9}{2}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n < \frac{9}{2}$ و منه $\frac{7}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{2} = \frac{7}{2}$ $\frac{7}{9}u_n <$ أي $\frac{7}{9}u_n + 1 < \frac{7}{2} + 1$ إذن $u_{n+1} < \frac{9}{2}$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n < \frac{9}{2}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة:

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{9}u_n + 1 - u_n = u_n\left(\frac{7}{9} - 1\right) + 1 = 1 - \frac{2}{9}u_n$$

من السؤال السابق لدينا $u_n < \frac{9}{2}$ تكافئ $\frac{2}{9}u_n < 1$ أي $1 - \frac{2}{9}u_n > 0$ و منه $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن
المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$
و بما أنها محدودة من الأعلى $(u_n < \frac{9}{2})$ فهي متقاربة.

2-المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثمّ حساب حدها الأوّل:

لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}u_n + 1\right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{9}u_n + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{7}{9}u_n - \frac{7}{6} = \frac{7}{9}\left(\frac{1}{3}u_n - \frac{9}{6}\right) = \frac{7}{9}\left(\frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{9}v_n \end{aligned}$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{7}{9}$ و حدها الأوّل $v_0 = \frac{1}{3}u_0 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

ب) كتابة عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n:

المتتالية (v_n) هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n$

ج) استنتاج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$ ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$ أي $\frac{1}{3}u_n = v_n + \frac{3}{2}$ و منه

$$u_n = 3\left(v_n + \frac{3}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}\times\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$$

• **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{7}{9} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n = 0$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{3}{2}\times\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

3-حسب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا حسب ما سبق $\frac{1}{3}u_n = v_n + \frac{3}{2}$ بالتعويض في المجموع نجد :

$$S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \cdots + \frac{1}{3}u_n = v_0 + \frac{3}{2} + v_1 + \frac{3}{2} + \cdots + v_n + \frac{3}{2}$$
$$= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{T_n} + \underbrace{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{3}{2}}_{n+1} = T_n + \frac{3}{2}(n+1)$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية و بالتالي

$$T_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{1}{2}\times\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{4}\left(\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}-1\right)$$

و منه

$$S_n = T_n + \frac{3}{2}(n+1) = \frac{9}{4}\left(\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}-1\right) + \frac{3}{2}(n+1)$$

حل التمرين 13

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) التحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = (u_n-3)^2 + 3$:

لدينا

$$u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12 = u_n^2 - 2\times 3u_n + 3^2 + 3 = (u_n-3)^2 + 3$$

ب) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $3 < u_n < 4$:

نضع $P(n) : 3 < u_n < 4$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $3 < u_0 < 4$ أي $3 < 3 + e^{-2} < 4$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 3 < u_n < 4$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 3 < u_{n+1} < 4$ صحيحة .

لدينا من الفرض $3 < u_n < 4$ و منه $0 < u_n - 3 < 1$ أي $0 < (u_n-3)^2 < 1$

أي $3 < (u_n-3)^2 + 3 < 4$ إذن $3 < u_{n+1} < 4$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 3 < u_n < 4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-

أ) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n): لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n-3)^2 + 3 - u_n = (u_n-3)^2 - (u_n-3) \\ &= (u_n-3)\left[(u_n-3) - 1\right] = (u_n-3)(u_n-4) \end{aligned}$$

من السؤال السابق لدينا $3 < u_n < 4$ و منه

$$\begin{cases} u_n - 3 > 0 \\ u_n - 4 < 0 \end{cases}$$

إذن $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) استنتاج أنّ (u_n) متقاربة:

المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل $(3 < u_n)$ فهي متقاربة .

3- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 و تعيين حدها الأوّل:

لدينا

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln\left[(u_n-3)^2 + 3 - 3\right] = \ln(u_n-3)^2 = 2\ln(u_n-3) = 2v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأوّل $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln(3 + e^{-2} - 3) = -2$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3 + e^{\left(-2^{n+1}\right)}$:

المتتالية (v_n) هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$

و من جهة لدينا $v_n = \ln(u_n - 3)$ أي $(u_n - 3) = e^{v_n}$ و منه $u_n = e^{v_n} + 3 = e^{-2^{n+1}} + 3$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} -2^{n+1} = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2^{n+1}} = 0$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-2^{n+1}} + 3 = 3$$

4- حساب P_n بدلالة n:

لدينا مما سبق

$$(u_n - 3) = e^{v_n}$$

إذن بالتعويض في المجموع نجد :

$$P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \cdots \times e^{v_n}$$
$$= e^{v_0 + v_1 + \cdots + v_n} = e^{v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} = e^{-2 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}} = e^{2\left(1-2^{n+1}\right)}$$

إضغط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 14

1- حساب u_2 و u_3:لدينا

$$u_2 = \frac{1}{2\times 1+2} u_1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{4} \times (2) - \frac{1}{2} = 0$$
$$u_3 = \frac{2}{2\times 2+2} u_2 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{6} \times (0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

2-

أ) برهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: لدينا

$$v_{n+1} = (n+1)\,u_{n+1} + 2 = (n+1)\left(\frac{n}{2n+2}u_n - \frac{1}{n+1}\right) + 2$$
$$= (n+1)\left(\frac{n}{2\,(n+1)}u_n - \frac{1}{n+1}\right) + 2 = (n+1)\,\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{2}u_n - 1\right) + 2$$
$$= \frac{n}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{n}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}\left(nu_n + 2\right) = \frac{1}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = 1 \times u_1 + 2 = 4$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n:

المتتالية (v_n) هندسية إذن عبارتها من الشكل

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-3}}$$

و من جهة لدينا $v_n = nu_n + 2$ أي $nu_n = v_n - 2$ و منه $u_n = \frac{v_n - 2}{n} = \frac{\frac{1}{2^{n-3}} - 2}{n}$

3-حساب بدلالة n المجموع S_n:

S_n مجموع متتالية هندسية و بالتالي :

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

4-حساب بدلالة n المجموع S'_n: لاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي لدينا $v_n - nu_n = 2$ و منه

$$S'_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \frac{4 \times 0}{v_0 - 0 \times u_0} + \frac{4 \times 1}{v_1 - 1 \times u_1} + \cdots + \frac{4n}{v_n - nu_n}$$

$$= \frac{4 \times 0}{2} + \frac{4 \times 1}{2} + \cdots + \frac{4n}{2} = 2 \times 0 + 2 \times 1 + \cdots + 2n = 2\left(0 + 1 + \cdots + n\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right) = n\left(n+1\right)$$

حل التمرين 15

إضغط للعودة إلى التمرين

1- برهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > -2$:

نضع $P(n) : u_n > -2$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 > -2$ أي $0 > -2$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : u_n > -2$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} > -2$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n > -2$ و منه $u_n - 2 > -4$ أي $\frac{1}{2}(u_n - 2) > \frac{1}{2} \times (-4)$ إذن $u_{n+1} > -2$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n > -2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتاج أنّ (u_n) متقاربة:

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - 2) - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

و من السؤال السابق لدينا $u_n > -2$ أي $-\frac{1}{2}u_n < 1$ أي $-\frac{1}{2}u_n - 1 < 0$ و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

و بما أن محدوة من الأسفل $(u_n > -2)$ فهي متقاربة .

3-(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - u_n}$

أ) برهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم كتابة v_n بدلالة n:

لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+2} - u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(u_{n+1} - 2) - \frac{1}{2}(u_n - 2)} = \frac{1}{\frac{1}{2}u_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}u_n + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)} = \frac{2}{(u_{n+1} - u_n)} = 2v_n \end{aligned}$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_1 - u_0} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}(u_0 - 2) - u_0} = -1$

و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -2^n$

ب) حساب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-2^0} + \frac{1}{-2^1} + \cdots + \frac{1}{-2^n} \\ &= -\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{T_n} = -T_n \end{aligned}$$

T_n مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول 1 أي

$$T_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

و منه

$$S_n=-T_n=-2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)$$

-4

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$ ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

من السؤال الثاني لدينا $v_n=\frac{1}{u_{n+1}-u_n}=\frac{1}{-\frac{1}{2}u_n-1}$ و منه $-\frac{1}{2}u_n-1=\frac{1}{v_n}$ أي $-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{v_n}+1$

و بالتالي

$$u_n=-2\left(\frac{1}{v_n}+1\right)=-2\left(\frac{1}{-2^n}+1\right)=-2\left(\frac{1}{-2^n}+1\right)=2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$$

• **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ **لدينا:** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)=2(0-1)=-2$

ب) حساب بدلالة n المجموع S'_n:لدينا

$$\begin{aligned}S'_n&=u_0+u_1+\cdots+u_n=2\left(\frac{1}{2^0}-1\right)+2\left(\frac{1}{2^1}-1\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\\&=2\left(\frac{1}{2^0}-1+\frac{1}{2^1}-1+\cdots+\frac{1}{2^n}-1\right)=2\left(\underbrace{\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{T_n}\underbrace{-1-1-\cdots-1}_{n+1\text{مرة}}\right)\\&=2\left(T_n-(n+1)\right)=2\left[2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-(n+1)\right]=2\left[2-\frac{1}{2^n}-(n+1)\right]\\&=4-\frac{1}{2^{n-1}}-2n-2=2-2n-\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

حل التمرين 16

إضغط للعودة إلى التمرين

-1 برهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n<3$:

نضع $P(n):u_n<3$

• من أجل $n=0$ لدينا : $u_0<3$ أي $1<3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

• نفرض أن $P(n):u_n<3$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1):u_{n+1}<3$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n<3$ و منه $\frac{2}{3}u_n<\frac{2}{3}\times3=2$ أي $\frac{2}{3}u_n+1<2+1$ إذن $u_{n+1}<3$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): u_n < 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-تبيان أنّ (u_n) متزايدة تماما:

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{3}u_n$$

و من السؤال السابق لدينا $u_n < 3$ أي $-\frac{1}{3}u_n > -\frac{1}{3} \times 3 = -1$ أي $1 - \frac{1}{3}u_n > 0$ و منه $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 3$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و تعيين حدّها الأول v_0:

لدينا

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدّها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2$

ب) تعيين عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتاج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و من جهة لدينا $v_n = u_n - 3$ و منه $u_n = v_n + 3 = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 = 3$

4-حساب S_n بدلالة n ثمّ تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 3n - 3 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$:

لدينا

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= -2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = -6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$

و لدينا $v_n = u_n - 3$ و منه $u_n = v_n + 3$ بالتعويض نجد

$$\begin{aligned}T_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 3 + v_1 + 3 + \cdots + v_n + 3\\&= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{S_n} + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n+1 \text{ مرة}} = S_n + 3(n+1)\\&= 6\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right) + 3n + 3 = 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 6 + 3n + 3\\&= 6 \times \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - 3 + 3n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - 3 + 3n\end{aligned}$$

حل التمرين 17

إضغط للعودة إلى التمرين

1- برهان بالتراجع أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$:

نضع $P(n) : u_n > \frac{2}{3}$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $\frac{2}{3} < u_0$ أي $\frac{2}{3} < 1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : u_n > \frac{2}{3}$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} > \frac{2}{3}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $u_n > \frac{2}{3}$ و منه $3u_n > 2$ أي $3u_n + 1 > 3$ أي $\frac{1}{3u_n+1} < \frac{1}{3}$

تكافئ $-\frac{1}{3u_n+1} > -\frac{1}{3}$ أي $1 - \frac{1}{3u_n+1} > 1 - \frac{1}{3}$ إذن $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n > \frac{2}{3}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-تبيان أنّ (u_n) متناقصة تماما:

لدينا

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{1}{3u_n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1 - 1 - u_n(3u_n+1)}{3u_n+1} = \frac{3u_n - u_n(3u_n+1)}{3u_n+1}\\&= \frac{u_n[3 - (3u_n+1)]}{3u_n+1} = \frac{u_n(2 - 3u_n)}{3u_n+1}\end{aligned}$$

و من السؤال السابق لدينا $u_n > \frac{2}{3}$ أي $\begin{cases}2 - 3u_n < 0\\3u_n + 1 > 0\\u_n > 0\end{cases}$ و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

3- المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 - \frac{2}{u_n}$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و تعيين حدّها الأول v_0:

لدينا

$$v_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_{n+1}} = 3 - \frac{2}{1 - \frac{1}{3u_n + 1}} = 3 - \frac{2}{\frac{3u_n + 1 - 1}{3u_n + 1}} = 3 - \frac{2(3u_n + 1)}{3u_n}$$
$$= 3 - \frac{6u_n + 2}{3u_n} = 3 - \frac{6u_n}{3u_n} - \frac{2}{3u_n} = 3 - 2 - \frac{2}{3u_n} = 1 - \frac{2}{3u_n}$$
$$= \frac{1}{3}\left(3 - \frac{2}{u_n}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدّها الأول $v_0 = 3 - \frac{2}{u_0} = 3 - \frac{2}{1} = 1$

ب) تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{2}{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

و من جهة لدينا $v_n = 3 - \frac{2}{u_n}$ أي $\frac{2}{u_n} = 3 - v_n$ و منه $u_n = \dfrac{2}{3 - v_n} = \dfrac{2}{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ و منه $\dfrac{2}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4-حساب S_n بدلالة n ثمّ تبيان أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 3n + \frac{1}{2}\left[3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$:

لدينا

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

و من جهة لدينا $v_n = 3 - \frac{2}{u_n}$ أي $\frac{2}{u_n} = 3 - v_n$ بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \cdots + \frac{2}{u_n} = 3 - v_0 + 3 - v_1 + \cdots + 3 - v_n \\ &= \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n+1 \text{ مرة}} - \underbrace{(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)}_{S_n} = 3(n+1) - \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\ &= 3n + 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3n + \frac{1}{2}\left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

حل التمرين 18

إضغط للعودة إلى التمرين

1- حساب u_1 و u_2 ثمّ التحقق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 6 - \frac{24}{5 + u_n}$:

لدينا

$$u_1 = \frac{6 + 6u_0}{5 + u_0} = \frac{6 + 6 \times 0}{5 + 0} = \frac{6}{5}$$

$$u_2 = \frac{6 + 6u_1}{5 + u_1} = \frac{6 + 6 \times \frac{6}{5}}{5 + \frac{6}{5}} = \frac{\frac{5 \times 6 + 36}{5}}{\frac{25 + 6}{5}} = \frac{66}{31}$$

و لدينا

$$u_{n+1} = 6 - \frac{24}{5 + u_n} = \frac{6(5 + u_n) - 24}{5 + u_n} = \frac{6 + 6u_n}{5 + u_n}$$

و منه المطلوب

-2

أ) برهان بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n < 3$:

نضع $P(n) : 0 \leq u_n < 3$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \leq u_0 < 3$ أي $0 \leq 0 < 3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 0 \leq u_n < 3$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 0 \leq u_{n+1} < 3$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 \leq u_n < 3$ و منه $5 \leq 5 + u_n < 8$ أي $\frac{1}{8} < \frac{1}{5 + u_n} \leq \frac{1}{5}$

أي $-\frac{24}{8} < -\frac{24}{5 + u_n} \leq -\frac{24}{5}$ تكافؤ $6 - 3 < 6 - \frac{24}{5 + u_n} \leq 6 - \frac{24}{5}$ إذن $3 > u_{n+1} \geq \frac{6}{5} \geq 0$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 0 \leq u_n < 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):لدينا

$$u_{n+1}-u_n=\frac{6+6u_n}{5+u_n}-u_n=\frac{6+6u_n-u_n(5+u_n)}{5+u_n}=\frac{6+u_n-u_n^2}{5+u_n}$$

نحل المعادلة $-u_n^2+u_n+6=0$ لدينا $\Delta=b^2-4ac=1-4\times(-1)\times 6=25$

و منه
$$\begin{cases} l_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+5}{-2}=-2 \\ l_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-5}{-2}=3 \end{cases}$$
و منه

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n+6}{5+u_n}=\frac{-(u_n-3)(u_n+2)}{5+u_n}=\frac{(3-u_n)(u_n+2)}{5+u_n}$$

من البرهان بالتراجع لدينا $0\leq u_n<3$ أي $\begin{cases} 3-u_n>0 \\ u_n+2>0 \\ 5+u_n>0 \end{cases}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3-(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-3}$

أ) إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{8}{3}$ ثمّ كتابة عبارة v_n بدلالة n:

لدينا:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-3}=\frac{\dfrac{6+6u_n}{5+u_n}+2}{\dfrac{6+6u_n}{5+u_n}-3}=\frac{\dfrac{6+6u_n+2(5+u_n)}{5+u_n}}{\dfrac{6+6u_n-3(5+u_n)}{5+u_n}}$$
$$=\frac{16+8u_n}{3u_n-9}=\frac{8}{3}\times\frac{u_n+2}{u_n-3}=\frac{8}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{8}{3}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0+2}{u_0-3}=\dfrac{0+2}{0-3}=-\dfrac{2}{3}$

و بالتالي عبارة الحد العام هي $v_n=v_0\times q^n=-\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{8}{3}\right)^n$

ب) تبيان من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=3+\dfrac{5}{v_n-1}$ ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $v_n=\dfrac{u_n-3+3+2}{u_n-3}=\dfrac{u_n-3}{u_n-3}+\dfrac{5}{u_n-3}=1+\dfrac{5}{u_n-3}$

أي $\frac{5}{u_n-3} = v_n - 1$ أي $u_n - 3 = \frac{5}{v_n-1}$ و منه

$$u_n = \frac{5}{v_n-1} + 3 = \frac{5}{-\frac{2}{3}\times\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1} + 3$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:**

بما أن $\frac{8}{3} > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{3}\right)^n = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1} + 3 = 3$

4-حساب المجموع S_n بدلالة n:

لدينا $v_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n = -\frac{2}{3}\frac{8^n}{3^n}$ و منه $3^n v_n = -\frac{2}{3}8^n$ بالتعويض نجد

$$S_n = v_0 + 3\times v_1 + 3^2\times v_2 + \cdots + 3^n\times v_n = \left(-\frac{2}{3}8^0\right) + \left(-\frac{2}{3}8^1\right) + \cdots + \left(-\frac{2}{3}8^n\right)$$
$$= -\frac{2}{3}\underbrace{\left(8^0 + 8^1 + \cdots + 8^n\right)}_{T_n} = -\frac{2}{3}T_n$$

T_n مجموع متتالية هندسية أساسها 8 و حدها الأول 1 و منه

$$T_n = 8^0 + 8^1 + \cdots + 8^n = \frac{1-8^{n+1}}{1-8} = -\frac{1-8^{n+1}}{7}$$

و بالتالي

$$S_n = -\frac{2}{3}T_n = -\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1-8^{n+1}}{7}\right) = \frac{2}{21}\left(1-8^{n+1}\right)$$

حل التمرين 19

إضغط للعودة إلى التمرين

I) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f ثم تبيان أنّه من أجل كل x من $[2;3]$، $2 \le f(x) \le \frac{11}{5}$:

- **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[2;3]$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(3x+2)'(x+2) - (x+2)'(3x+2)}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - (3x+2)}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{3(x+2) - (3x+2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2;3]$

و لدينا $x \in [2;3]$ معناه $2 \leq x \leq 3$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2;3]$ فإن $f(2) \leq f(x) \leq f(3)$

و منه $2 \leq f(x) \leq \frac{11}{5}$

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

1-برهان بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $2 < u_n \leq 3$:

نضع $P(n) : 2 < u_n \leq 3$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $2 < u_0 \leq 3$ أي $2 < 3 \leq 3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 2 < u_n \leq 3$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 2 < u_{n+1} \leq 3$ صحيحة .

لدينا من الفرض $2 < u_n \leq 3$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2;3]$ فإن $f(2) < f(u_n) \leq f(3)$

أي $2 < u_{n+1} \leq \frac{11}{5} \leq 3$ و منه $2 < f(u_{n+1}) \leq 3$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 2 < u_n \leq 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-التحقق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$ ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر (u_n):

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+2} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{3u_n+2-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$$
$$= \frac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2}$$

نحل المعادلة $-u_n^2 + u_n + 2 = 0$ لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$

و منه $\begin{cases} l_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{-2} = -1 \\ l_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$

و منه

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2} = \frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2} = \frac{(u_n+1)(2-u_n)}{u_n+2}$$

و من جهة لدينا $2 < u_n \leq 3$ معناه $\begin{cases} u_n + 1 > 0 \\ 2 - u_n < 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

-3

أ) تبيان أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-2 \leq \frac{1}{4}(u_n-2)$:

لدينا

$$u_{n+1}-2=\frac{3u_n+2}{u_n+2}-2=\frac{3u_n+2-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{u_n-2}{u_n+2}$$

و لدينا $3 \leq u_n < 2$ أي $2+u_n < 4$ أي $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+2}$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد الموجب $u_n-2>0$ فإن $\frac{1}{4}(u_n-2) \leq \frac{u_n-2}{4} < \frac{u_n-2}{u_n+2}$ إذن $u_{n+1}-2 \leq \frac{1}{4}(u_n-2)$

ب) برهان أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $\left(\frac{1}{4}\right)^n \geq u_n-2 > 0$ ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

نضع $Q(n): 0 < u_n-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

• من أجل $n=0$ لدينا : $\left(\frac{1}{4}\right)^0 \geq u_0-2 > 0$ أي $1 \geq 1 > 0$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .

• نفرض أن $Q(n): 0 < u_n-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1): 0 < u_{n+1}-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 < u_n-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد $\frac{1}{4}$

نجد $0 < \frac{1}{4}(u_n-2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ و من السؤال السابق لدينا $u_{n+1}-2 \leq \frac{1}{4}(u_n-2)$

إذن $0 < u_{n+1}-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n): 0 < u_n-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

•**حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:**

لدينا من السؤال السابق $0 < u_n-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و بإدخال النهاية على أطراف المتراجحة نجد

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \geq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n-2 > 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-2=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

4-استنتاج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_0+u_1+\cdots+u_n \leq 2(n+1)+\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$:

لدينا مما سبق $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ أي $u_n \leq 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ وبالتعويض نجد

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &\leq 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^0 + 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \cdots + 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &\leq \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n+1 \text{ مرة}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n}_{T_n} \\ &\leq 2(n+1) + T_n \end{aligned}$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الأول 1 و منه

$$T_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

و بالتالي

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n \leq 2(n+1) + T_n = 2(n+1) + \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

3 -بكالوريات سابقة-شعبة رياضيات

حل التمرين 1

إضغط للعودة إلى التمرين

1- تبيان أنّ الدالة f متزايدة تماما :

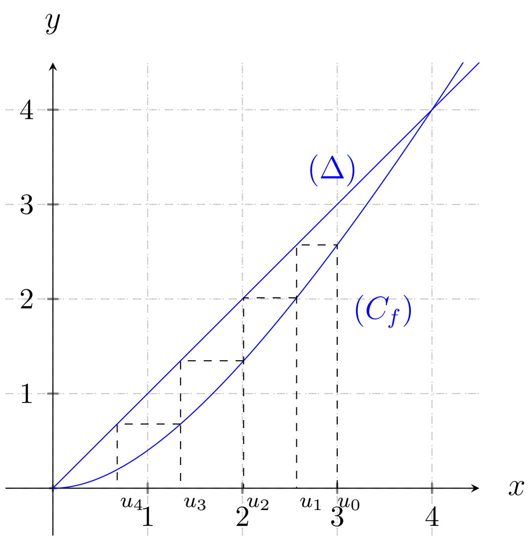
- **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(2x^2)'(x+4) - (x+4)'(2x^2)}{(x+4)^2} = \frac{4x(x+4) - 2x^2}{(x+4)^2} = \frac{2x^2+16x}{(x+4)^2}$$

لدينا $x \in [0;+\infty[$ معناه $\begin{cases} 2x^2+16x \geq 0 \\ (x+4)^2 > 0 \end{cases}$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

2-

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 :



ب) تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) $(x=0)$

3-

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq u_n \leq 3$:

نضع $P(n) : 0 \leq u_n \leq 3$

- من أجل $n=0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 3$ أي $0 \leq 3 \leq 3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 0 \leq u_n \leq 3$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 0 \leq u_{n+1} \leq 3$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 \le u_n \le 3$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن $f(0) \le f(u_n) \le f(3)$

أي $0 \le u_{n+1} \le \frac{18}{7} \le 3$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): 0 \le u_n \le 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة: لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n^2}{u_n+4} - u_n = \frac{2u_n^2 - u_n(u_n+4)}{u_n+4} \\ &= \frac{u_n[2u_n - (u_n+4)]}{u_n+4} = \frac{u_n(u_n-4)}{u_n+4} \end{aligned}$$

و من السؤال السابق لدينا $0 \le u_n \le 3$ أي $u_n - 3 \le 0$ و منه $u_n - 4 \le -1 < 0$ و بالتالي $u_{n+1} - u_n \le 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

ج) استنتاج أن (u_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأسفل $(u_n \ge 0)$ فهي متقاربة.

4-

أ) دراسة إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ واستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$:

لدينا

$$\begin{aligned} 7u_{n+1} - 6u_n &= \frac{14u_n^2}{u_n+4} - 6u_n = \frac{14u_n^2 - 6u_n(u_n+4)}{u_n+4} \\ &= \frac{u_n[14u_n - 6(u_n+4)]}{u_n+4} = \frac{u_n(8u_n-24)}{u_n+4} = \frac{8u_n(u_n-3)}{u_n+4} \end{aligned}$$

لدينا مما سبق $0 \le u_n \le 3$ معناه $\begin{cases} 8u_n \ge 0 \\ u_n - 3 \le 0 \\ u_n + 4 \ge 0 \end{cases}$ و منه $7u_{n+1} - 6u_n \le 0$

و لدينا $7u_{n+1} - 6u_n \le 0$ أي $7u_{n+1} \le 6u_n$ و منه $u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$ و من البرهان بالتراجع $u_{n+1} \ge 0$

إذن $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$

ب) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$:

نضع $Q(n): 0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \le u_0 \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^0$ أي $0 \le 3 \le 3$ و منه : $Q(0)$ صحيحة .

• نفرض أن $Q(n) : 0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1) : 0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد $\frac{6}{7}$ نجد $0 \leq \frac{6}{7}u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

و من السؤال السابق لدينا $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$ و منه $0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

و منه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن : $Q(n) : 0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

من السؤال السابق لدينا $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ و بإدخال النهاية على أطراف المتراجحة نجد

$0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ و بما أن $-1 < \frac{6}{7} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$

أي $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

حل التمرين 2

إضغط للعودة إلى التمرين

1- حساب u_1 و u_2 ثم استنتاج قيمة الأساس q :

لدينا $\ln(u_1) + \ln(u_2) = 11$ تكافئ $\ln(u_1 \times u_2) = 11$ تكافئ $u_1 \times u_2 = e^{11}$ أي $u_1 = \frac{e^{11}}{u_2}$

بالتعويض في المعادلة $u_1 + u_2 = e^4(1+e^3)$ نجد $\frac{e^{11}}{u_2} + u_2 = e^4(1+e^3)$ تكافئ $\frac{e^{11}+u_2^2}{u_2} = e^4(1+e^3)$

تكافئ $e^{11} + u_2^2 = u_2 e^4(1+e^3)$ و منه $u_2^2 - u_2 e^4(1+e^3) + e^{11} = 0$ معادلة من الدرجة الثانية مجهولها u_2 لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = e^8\left(1+e^3\right)^2 - 4e^{11} = e^8\left(1+e^6+2e^3\right) - 4e^{11}\\ &= e^8 + e^{14} + 2e^{11} - 4e^{11} = e^8 + e^{14} - 2e^{11} = \left(e^4\right)^2 + \left(e^7\right)^2 - 2e^{4+7}\\ &= \left(e^4\right)^2 + \left(e^7\right)^2 - 2e^4 \times e^7 = \left(e^7 - e^4\right)^2\end{aligned}$$

و منه

$$\begin{cases} u_{2_1} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{e^4\left(1+e^3\right)+e^7-e^4}{2} = \dfrac{e^4+e^7+e^7-e^4}{2} = e^7 \\ u_{2_2} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{e^4\left(1+e^3\right)-e^7+e^4}{2} = \dfrac{e^4+e^7-e^7+e^4}{2} = e^4 \end{cases}$$

بالتعويض في $u_1 = \frac{e^{11}}{u_2}$ نجد $\begin{cases} u_{1_1} = \frac{e^{11}}{u_{2_1}} = \frac{e^{11}}{e^7} = e^4 \\ u_{1_2} = \frac{e^{11}}{u_{2_2}} = \frac{e^{11}}{e^4} = e^7 \end{cases}$ لكن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

أي $u_1 < u_2$ و منه u_{1_2} و u_{2_2} مرفوضين لأن $u_{1_2} > u_{2_2}$ و منه $\begin{cases} u_1 = u_{1_1} = e^4 \\ u_2 = u_{2_1} = e^7 \end{cases}$

و من جهة بما أن المتتالية (u_n) هندسية فإن $u_2 = u_1 \times q$ و منه $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{e^7}{e^4} = e^3$

2-نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.

أ) التعبير عن u_n بدلالة n:

المتتالية (u_n) هندسية و بالتالي عبارتها هي

$$u_n = u_p \times q^{n-p} = u_1 \times q^{n-1} = e^4 \times \left(e^3\right)^{n-1} = e^4 \times e^{3(n-1)} = e^4 \times e^{3n-3} = e^{3n+1}$$

ب) حساب S_n بدلالة n:

لدينا $u_n = e^{3n+1}$ بالتعويض نجد

$$S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \cdots + \ln(u_n) = \ln e^{3\times 0+1} + \ln e^{3\times 1+1} + \cdots + \ln e^{3n+1} = \ln T_n$$

$$= (3\times 0+1) + (3\times 1+1) + \cdots + (3n+1) = 3\underbrace{(0+1+2+\cdots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1\text{ مرة}}$$

$$= \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{3n}{2}+1\right) = (n+1)\left(\frac{3n+2}{2}\right)$$

بالنسبة للأسئلة الموالية أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

حل التمرين 3

إضغط للعودة إلى التمرين

1- برهان بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_n = 7^{n+1} - 4$:

نضع $P(n) : 3u_n = 7^{n+1} - 4$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $3u_0 = 7^{0+1} - 4$ أي $3 = 3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 3u_n = 7^{n+1} - 4$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$ صحيحة .

لدينا من الفرض $3u_n = 7^{n+1} - 4$ بضرب أطراف المساواة بالعدد 7 نجد $3\times 7u_n = 7\left(7^{n+1} - 4\right) = 7^{n+2} - 28$

و بإضافة العدد 3×8 نجد $3\times 7u_n+3\times 8=7^{n+2}-28+3\times 8$ أي $3(7u_n+8)=7^{n+2}-4$ إذن
$3u_{n+1}=7^{n+2}-4$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n):3u_n=7^{n+1}-4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=1+7+7^2+\cdots+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

أ) حساب بدلالة n المجموع S_n ثم ايجاد علاقة بين S_n و S'_n:

S_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها 7 و حدها الأول 1 و منه

$$S_n=1+7+7^2+\cdots+7^n=1\times\frac{1-7^{n+1}}{1-7}=\frac{1-7^{n+1}}{-6}=\frac{7^{n+1}-1}{6}$$

و من جهة لدينا $3u_n=7^{n+1}-4$ أي $u_n=\dfrac{7^{n+1}-4}{3}$ بالتعويض في S'_n نجد

$$\begin{aligned}S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n&=\frac{7^{0+1}-4}{3}+\frac{7^{1+1}-4}{3}+\cdots+\frac{7^{n+1}-4}{3}\\&=\frac{1}{3}\left[7^{0+1}+7^{1+1}+\cdots+7^{n+1}-\underbrace{(4-4-\cdots-4)}_{n+1\text{مرة}}\right]=\frac{1}{3}\left[7\left(1+7^1+\cdots+7^n\right)-4(n+1)\right]\\&=\frac{1}{3}\left[7S_n-4(n+1)\right]\end{aligned}$$

ب) استنتاج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$:

لدينا $S'_n=\dfrac{1}{3}\left[7S_n-4(n+1)\right]$ أي

$$\begin{aligned}3S'_n=7S_n-4(n+1)&=\frac{7\left(7^{n+1}-1\right)}{6}-4n-4\\&=\frac{7^{n+2}-7-24n-24}{6}=\frac{7^{n+2}-24n-31}{6}\end{aligned}$$

و منه $18S'_n=7^{n+2}-24n-31$

3- أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

حل التمرين 4

إضغط للعودة إلى التمرين

1-

أ) تبيان أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$:

نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $P(n) : u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1)$ أي $0 = 0$ و منه : $P(0)$ صحيحة.
- نفرض أن $P(n) : u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$ صحيحة

لدينا من الفرض $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ بضرب أطراف المساواة بالعدد 4 نجد

$4u_n = \frac{4}{3}(4^n - 1) = \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{4}{3}$ و بإضافة العدد 1 نجد $4u_n + 1 = \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{1}{3}$

إذن $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) التحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوّليين فيما بينهما:

لدينا $u_{n+1} = 4u_n + 1$ و منه $u_{n+1} - 4u_n = 1$ إذن حسب مبرهنة بيزو فإن العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوّليين فيما بينهما

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

أ) إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0:

لدينا

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 4$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

ب) كتابة بدلالة n المجموع S_n:لدينا

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n} = v_0 \times \frac{1 - q^{3n+1}}{1 - q} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - 4^{3n+1}}{1 - 4} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - 4^{3n+1}}{-3} = \frac{4^{3n+1} - 1}{9}$$

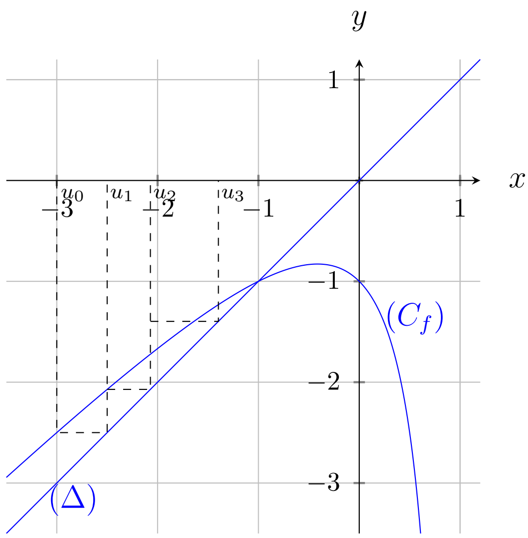
3-

4- أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

إضعط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 5

1- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3:



المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) $(x = -1)$

2-برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-3 \leq u_n < -1$:

نضع $P(n) : -3 \leq u_n < -1$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $-3 \leq u_0 < -1$ أي $-3 \leq -3 < -1$ و منه : $P(0)$ صحيحة.
- نفرض أن $P(n) : -3 \leq u_n < -1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : -3 \leq u_{n+1} < -1$ صحيحة

لدينا من الفرض $-3 \leq u_n < -1$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-3;-1[$ فإن $f(-3) \leq f(u_n) < f(-1)$ أي $-3 \leq -\frac{5}{2} \leq u_{n+1} < -1$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : -3 \leq u_n < -1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . **3**-

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$:لدينا

$$u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1) = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1) = \frac{u_n^2 + 1 + u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{3}{4}(u_n + 1)$$
$$= \frac{u_n(u_n + 1)}{u_n - 1} - \frac{3}{4}(u_n + 1) = (u_n + 1)\left(\frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{3}{4}\right)$$
$$= (u_n + 1)\left(\frac{4u_n - 3(u_n - 1)}{4(u_n - 1)}\right) = \frac{(u_n + 1)(u_n + 3)}{4(u_n - 1)}$$

و من السؤال السابق لدينا $-3 \leq u_n < -1$ أي $\begin{cases} u_n + 1 < 0 \\ u_n + 3 \geq 0 \\ u_n - 1 < 0 \end{cases}$ إذن $u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1) \geq 0$ و

منه $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$

ب) استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$:

لدينا من السؤال السابق $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$ بالتعويض بقيم n نجد

من أجل $n = 0$: $u_1 + 1 \geq \frac{3}{4}(u_0 + 1)$

من أجل $n = 1$: $u_2 + 1 \geq \frac{3}{4}(u_1 + 1)$

$\vdots$

من أجل $n - 1$: $u_n + 1 \geq \frac{3}{4}(u_{n-1} + 1)$

بضرب أطراف المتراجحات بـ-1 نجد

من أجل $n = 0$: $-(u_1 + 1) \leq -\frac{3}{4}(u_0 + 1)$

من أجل $n = 1$: $-(u_2 + 1) \leq -\frac{3}{4}(u_1 + 1)$

$\vdots$

من أجل $n - 1$: $-(u_n + 1) \leq -\frac{3}{4}(u_{n-1} + 1)$

قمنا بضرب أطراف المتراجحة السابقة بـ -1 حتى تصبح موجبة ($u_n + 1 < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n) حتى نتمكن بضرب المتراجحات السابقة طرفا لطرف و الإختزال كالآتي

من أجل $n = 0$: $\cancel{-(u_1 + 1)} \leq -\frac{3}{4}(u_0 + 1)$

من أجل $n = 1$: $\cancel{-(u_2 + 1)} \leq \cancel{-}\frac{3}{4}\cancel{(u_1 + 1)}$

$\vdots$

من أجل $n - 1$: $-(u_n + 1) \leq \cancel{-}\frac{3}{4}\cancel{(u_{n-1} + 1)}$

و منه نجد $-(u_n + 1) \leq -\left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 + 1)$ تكافئ $u_n + 1 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 + 1)$

أي $(-3+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n+1$ و منه $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

• **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نعلم أن $u_n+1<0$ و حسب ما سبق فإن $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n+1<0$ بإدخال النهاية على أطراف المتراجحة $\lim\limits_{n\to\infty} -2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \lim\limits_{n\to\infty} u_n+1<0$ و منه $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} u_n+1<0$ لأن $-1<<\frac{3}{4}1$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n+1=0$ و منه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-1$

4-تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$:

لدينا $(u_n+1)<0$ من أجل كل عدد طبيعي n و منه $(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$

و من جهة حسب السؤال السابق لدينا

من أجل $n=0$: $(u_0+1) \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$

من أجل $n=1$: $(u_1+1) \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^1$

$\vdots$

من أجل n : $(u_n+1) \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

بجمع أطراف المتراجحات طرفا لطرف نجد

$$\begin{aligned}(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1) &\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0-2\left(\frac{3}{4}\right)^1-\cdots-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\\ &\geq -2\underbrace{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}_{T_n}\\ &\geq -2T_n\end{aligned}$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ و حدها الأول 1 و منه

$$T_n=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}=4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]=-4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$

إذن

$$(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1) \geq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$

و في الأخير

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1) < 0$$

•استنتاج $\lim_{n\to+\infty} S_n$:
من السؤال السابق لدينا

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1) < 0$$

تكافئ

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq u_0+u_1+\cdots+u_n+\underbrace{1+1\cdots+1}_{n+1\text{مرة}} < 0$$

تكافئ $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq S_n+n+1<0$ أي $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]+1-n \leq S_n < 1-n$

و بإدخال النهاية نجد $-\infty \leq \lim_{n\to+\infty} S_n < -\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

حل التمرين 6

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

2-أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

3-نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=u_n+505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=v_n+673 \end{cases}$

• كتابة u_α بدلالة α ثم كتابة v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان:

لدينا $\begin{cases} u_{n+1}-u_n=505=r_1 \\ v_{n+1}-v_n=671=r_2 \end{cases}$ و منه (u_n) متتالية حسابية أساسها r_1

و (v_n) متتالية حسابية أساسها r_2

و بالتالي عبارتي الحد العام للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي $\begin{cases} u_\alpha=u_0+\alpha r_1=3+505\alpha \\ v_\beta=v_0+\beta r_2=4+673\beta \end{cases}$

-4

أ) تعيين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم تبيان أنّها تشكل متتالية حسابية (w_n) :

الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) تحقق $u_\alpha = v_\beta$ أي $4+673\beta = 3+505\alpha$ و منه $505\alpha - 673\beta =$

1 و حسب السؤال الأول فإن $k \in \mathbb{Z}$; $\begin{cases} \alpha = 673k+4 \\ \beta = 505k+3 \end{cases}$

و من جهة لدينا

$$\begin{cases} u_\alpha = 3+505\alpha = 3+505\,(673k+4) = 339865k+2023 = w_k \\ v_\beta = 4+673\beta = 4+673\,(505k+3) = 339865k+2023 = w_k \end{cases}$$

و بالتالي هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) أساسها $r = 339865$ وحدّها الأول $w_0 = 2023$ و عبارة حدها العام $w_n = 339865n + 2023$

ب) حساب بدلالة n الجداء $p = X_1.X_2.....X_n$:

لدينا

$$w_n - 2023 = 339865n + 2023 - 2023 = 339865n$$

و منه $X_n = \dfrac{1}{505}(w_n - 2023) = \dfrac{339865n}{505} = 673n$ بالتعويض في الجداء p نجد

$$p = X_1.X_2.....X_n = (673\times 1)(673\times 2)\times\cdots\times(673\times n)$$
$$= 673^n \times 1\times 2\times\cdots\times n = 673^n n!$$

حل التمرين 7

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) التحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$:

بما أن (u_n) حدودها موجبة فلدينا

$$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1 = \left(\sqrt{u_n}\right)^2 + 2\sqrt{u_n} + 1 = \left(\sqrt{u_n}+1\right)^2$$

و منه $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = \sqrt{u_n} + 1 - \sqrt{u_n} = 1$

ب) استنتاج كتابة الحد العام u_n بدلالة n :

بوضع $w_n = \sqrt{u_n}$ و حسب السؤال السابق $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ فإن (w_n) متتالية حسابية أساسها

و حدها الأول $r = 1$ و $w_1 = \sqrt{u_1} = \sqrt{0} = 0$

إذن عبارة w_n هي $w_n = w_1 + (n-1)r = n-1$

و بالتالي عبارة الحد العام u_n هي $u_n = w_n^2 = (n-1)^2$

2-التحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = n(n-2)+1$:

لدينا

$$u_n = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 = n(n-2)+1$$

3-

4-أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

حل التمرين 8

إضغط للعودة إلى التمرين

1-

أ) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[1;4]$:

- **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[1;4]$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(4x+4)'(9-x) - (9-x)'(4x+4)}{(9-x)^2} = \frac{4(9-x)+(4x+4)}{(9-x)^2} = \frac{40}{(9-x)^2} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;4]$

ب) إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فإنّ: $f(x) \in [1;4]$:

معناه نثبت أنه إذا كان $1 \le x \le 4$ فإن $1 \le f(x) \le 4$

لدينا $1 \le x \le 4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;4]$ فإن $f(1) \le f(x) \le f(4)$

و منه $1 \le f(x) \le 4$

2-المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < 4$:

نضع $P(n) : 1 < u_n < 4$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $1 < u_0 < 4$ أي $1 < 2 < 4$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 1 < u_n < 4$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 1 < u_{n+1} < 4$ صحيحة .

لدينا من الفرض $1 < u_n < 4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على $[1;4]$ فإن $f(1) < f(u_n) < f(4)$

أي $1 < u_{n+1} < 4$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 1 < u_n < 4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتاج أنها متقاربة:

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n + 4}{9 - u_n} - u_n = \frac{4u_n + 4 - u_n(9 - u_n)}{9 - u_n} = \frac{u_n^2 - 5u_n + 4}{9 - u_n}$$

لدينا من السؤال السابق $1 < u_n < 4$ أي $0 < 4 - u_n$ و بالتالي $0 < 5 < 9 - u_n$ و منه المقام موجب تماما فيكفي دراسة إشارة البسط ، نقوم بحل المعادلة $u_n^2 - 5u_n + 4 = 0$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(1)4 = 25 - 16 = 9$ و منه $\begin{cases} l_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ l_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$

إذن

$$u_n^2 - 5u_n + 4 = (u_n - l_1)(u_n - l_2) = (u_n - 4)(u_n - 1)$$

و من السؤال السابق لدينا $\begin{cases} u_n - 4 < 0 \\ u_n - 1 > 0 \end{cases}$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

و بما أنها محدودة من الأسفل $(1 < u_n)$ فهي متقاربة.

3-المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، كما يلي: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 4}$.

أ) برهان أن المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 :لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 4} = \frac{\dfrac{4u_n + 4}{9 - u_n} - 1}{\dfrac{4u_n + 4}{9 - u_n} - 4} = \frac{\dfrac{4u_n + 4 - (9 - u_n)}{\cancel{9 - u_n}}}{\dfrac{4u_n + 4 - 4(9 - u_n)}{\cancel{9 - u_n}}}$$

$$= \frac{5u_n - 5}{8u_n - 32} = \frac{5(u_n - 1)}{8(u_n - 4)} = \frac{5}{8}\frac{u_n - 1}{u_n - 4} = \frac{5}{8}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{5}{8}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 - 4} = \dfrac{2 - 1}{2 - 4} = -\dfrac{1}{2}$

ب) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتاج الحد العام u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{8}\right)^n$

و من جهة لدينا

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4} = \frac{u_n - 1 - 3 + 3}{u_n - 4} = \frac{u_n - 4 + 3}{u_n - 4} = \frac{u_n - 4}{u_n - 4} + \frac{3}{u_n - 4} = 1 + \frac{3}{u_n - 4}$$

أي $v_n - 1 = \dfrac{3}{u_n - 4}$ أي $u_n - 4 = \dfrac{3}{v_n - 1}$ و منه

$$u_n = 4 + \frac{3}{v_n - 1} = 4 + \frac{3}{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n - 1} = 4 - \frac{3}{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n + 1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:**

بما أن $-1 < \dfrac{5}{8} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{8}\right)^n = 0$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 4 - \frac{3}{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n + 1} = 4 - \frac{3}{1} = 1$$

4-حساب S_n بدلالة n :

لدينا $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{8}\right)^n = -\dfrac{1}{2}\dfrac{5^n}{8^n}$ و منه $8^n v_n = -\dfrac{1}{2}5^n$ بالتعويض في المجموع نجد

$$S_n = 8^0 v_0 + 8v_1 + 8^2 v_2 + \cdots + 8^n v_n = -\frac{1}{2}5^0 - -\frac{1}{2}5^1 - \cdots - \frac{1}{2}5^n$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\left(5^0 + 5^1 + \cdots + 5^n\right)}_{T_n} = -\frac{1}{2}T_n$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول 1 و بالتالي

$$T_n = 5^0 + 5^1 + \cdots + 5^n = \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} = \frac{1 - 5^{n+1}}{-4} = \frac{1}{4}\left(5^{n+1} - 1\right)$$

و منه

$$S_n = -\frac{1}{2}T_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(5^{n+1} - 1\right) = -\frac{1}{8}\left(5^{n+1} - 1\right) = \frac{1}{8}\left(1 - 5^{n+1}\right)$$

حل التمرين 9

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) حساب w_0 ثمّ احسب w_1 بدلالة α :

لدينا $w_0 = v_0 - u_0 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$ و أيضا

$$w_1 = v_1 - u_1 = 3\alpha v_0 + (1 - 3\alpha)\, u_0 - (3\alpha u_0 + (1 - 3\alpha)\, v_0)$$
$$= 3\alpha v_0 + (1 - 3\alpha)\, u_0 - 3\alpha u_0 - (1 - 3\alpha)\, v_0 = 3\alpha v_0 + u_0 - 3\alpha u_0 - 3\alpha u_0 - v_0 + 3\alpha v_0$$
$$= 6\alpha v_0 + u_0 - 6\alpha u_0 - v_0 = 18\alpha - 1 + 6\alpha - 3 = 24\alpha - 4$$

ب) تبيان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha - 1)$: لدينا

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = 3\alpha v_n + (1 - 3\alpha)\, u_n - 3\alpha u_n - (1 - 3\alpha)\, v_n$$
$$= 3\alpha\,(v_n - u_n) + (1 - 3\alpha)\,(u_n - v_n) = 3\alpha\,(v_n - u_n) - (1 - 3\alpha)\,(v_n - u_n)$$
$$= (3\alpha - (1 - 3\alpha))\,(v_n - u_n) = (6\alpha - 1)\,(v_n - u_n) = (6\alpha - 1)\, w_n$$

و منه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = (6\alpha - 1)$ و حدها الأول $w_0 = 4$

جـ) كتابة عبارة w_n بدلالة n و α، ثمّ تعيين قيم α حتى تكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$:

(w_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $w_n = w_0 \times q^n = 4(6\alpha - 1)^n$

و حتى تكون $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ يجب $-1 < 6\alpha - 1 < 1$ أي $0 < 6\alpha < 2$ و منه $0 < \alpha < \dfrac{1}{3}$

-2

أ) إثبات أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أنّ (v_n) متناقصة تماما : لدينا

$$u_{n+1} - u_n = 3\alpha u_n + (1 - 3\alpha)\, v_n - u_n = (3\alpha - 1)\, u_n + (1 - 3\alpha)\, v_n$$
$$= -(1 - 3\alpha)\, u_n + (1 - 3\alpha)\, v_n = (1 - 3\alpha)\,(v_n - u_n) = (1 - 3\alpha)\, w_n$$

بما أن $\dfrac{1}{6} < \alpha < \dfrac{1}{3}$ فإن $1 < 6\alpha < 2$ أي $0 < 6\alpha - 1 < 1$ و منه $w_n = 4(6\alpha - 1)^n > 0$

و أيضا $\dfrac{1}{6} < \alpha < \dfrac{1}{3}$ معناه $-\dfrac{1}{2} < -3\alpha < -1$ أي $0 < 1 - 3\alpha < \dfrac{1}{2}$ و منه $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

و لدينا

$$v_{n+1}-v_n=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n-v_n=(3\alpha-1)v_n+(1-3\alpha)u_n$$
$$=-(1-3\alpha)v_n+(1-3\alpha)u_n=(1-3\alpha)(u_n-v_n)$$
$$=-(1-3\alpha)(v_n-u_n)=-(1-3\alpha)w_n$$

إذن مما سبق نجد $v_{n+1}-v_n=-(1-3\alpha)w_n<0$ و منه المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

ب) استنتاج أنّ (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ :

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$

إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$

3-تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n+v_n=2$ واستنتاج قيمة ℓ :

نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $P(n): u_n+v_n=2$

- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0+v_0=2$ أي $-1+3=2$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n): u_n+v_n=2$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1): u_{n+1}+v_{n+1}=2$ صحيحة .

لدينا

$$u_{n+1}+v_{n+1}=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n+3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n$$
$$=\cancel{3\alpha u_n}+v_n-\cancel{3\alpha v_n}+\cancel{3\alpha v_n}+u_n-\cancel{3\alpha u_n}=u_n+v_n=2$$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): u_n+v_n=2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

و لدينا $u_n+v_n=2$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} 2=2=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ و بالتالي $\ell+\ell=2$ إذن $2\ell=2$ و منه $\ell=1$

4-حساب بدلالة α المجموع S :

لدينا $\begin{cases} v_n-u_n=w_n \\ v_n+u_n=2\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} -v_n+u_n=-w_n \\ v_n+u_n=2\end{cases}$ بالجمع طرفا لطرف نجد $2u_n=2-w_n$

و منه $u_n=\dfrac{2-w_n}{2}$ بالتعويض في المجموع S نجد

$$S=u_0+u_1+\cdots+u_{2020}=\frac{2-w_0}{2}+\frac{2-w_1}{2}+\cdots+\frac{2-w_{2020}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{2+2+\cdots+2}_{\text{2021 مرة}}-\underbrace{(w_0+w_1+\cdots+w_{2020})}_{T}\right]=\frac{1}{2}\left(2\,(2021)-T\right)$$

T هو مجموع متتالية هندسية و بالتالي

$$T = w_0 \times \frac{1-q^{2021}}{1-q} = 4 \times \frac{1-(6\alpha-1)^{2021}}{1-(6\alpha-1)} = 4 \times \frac{1-(6\alpha-1)^{2021}}{2-6\alpha} = \frac{2\left(1-(6\alpha-1)^{2021}\right)}{1-3\alpha}$$

و منه

$$S = \frac{1}{2}\left[2(2021) - T\right] = \frac{1}{2}\left[2(2021) - \frac{2\left(1-(6\alpha-1)^{2021}\right)}{1-3\alpha}\right] = 2021 - \frac{1-(6\alpha-1)^{2021}}{1-3\alpha}$$

حل التمرين 10

إضغط للعودة إلى التمرين

-1

أ) التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n+1)}$ لدينا:

$$\begin{aligned}
-\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n+1)} &= -\frac{11 \times 4(-4u_n+1)}{4 \times 4(-4u_n+1)} + \frac{27 \times 4}{4 \times 4(-4u_n+1)} = \frac{-44(-4u_n+1)+108}{16(-4u_n+1)} \\
&= \frac{-44(-4u_n+1)+108}{16(-4u_n+1)} = \frac{176u_n - 44 + 108}{16(-4u_n+1)} = \frac{176u_n+64}{16(-4u_n+1)} \\
&= \frac{16(11u_n+4)}{16(-4u_n+1)} = \frac{11u_n+4}{-4u_n+1} = u_{n+1}
\end{aligned}$$

ب) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 < u_n < -1$:

نضع $P(n) : -2 < u_n < -1$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $-2 < u_0 < -1$ أي $-2 < -\frac{3}{2} < -1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : -2 < u_n < -1$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : -2 < u_{n+1} < -1$ صحيحة .

لدينا من الفرض $-2 < u_n < -1$ أي $8 > -4u_n > 4$ تكافئ $9 > -4u_n + 1 > 5$ تكافئ $\frac{1}{5} > \frac{1}{-4u_n+1} > \frac{1}{9}$ معناه $\frac{27}{4} \times \frac{1}{5} > \frac{27}{4} \times \frac{1}{-4u_n+1} > \frac{27}{4} \times \frac{1}{9}$ أي $\frac{27}{20} > \frac{27}{4(-4u_n+1)} > \frac{3}{4}$
و بالتالي $-\frac{11}{4} + \frac{27}{20} > -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n+1)} > -\frac{11}{4} + \frac{3}{4}$ إذن $-1 > -\frac{28}{20} > u_{n+1} > -2$
و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : -2 < u_n < -1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ج) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتاج أنّها متقاربة: لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{11u_n+4}{-4u_n+1} - u_n = \frac{11u_n+4-u_n(-4u_n+1)}{-4u_n+1} = \frac{4u_n^2+10u_n+4}{-4u_n+1}$$

من السؤال السابق لدينا $-2 < u_n < -1$ و بالتالي $9 > -4u_n + 1 > 5$ و منه المقام موجب يكفي

دراسة إشارة البسط

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 4 \times 4 = 36$ و منه $\begin{cases} l_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10+6}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ l_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10-6}{8} = -2 \end{cases}$

إذن

$$4u_n^2 + 10u_n + 4 = 4\left(u_n - l_1\right)\left(u_n - l_2\right) = 4\left(u_n + \frac{1}{2}\right)\left(u_n + 2\right) = 2\left(2u_n + 1\right)\left(u_n + 2\right)$$

من السؤال السابق لدينا $-2 < u_n < -1$ و منه $\begin{cases} u_n + 2 > 0 \\ 2u_n + 1 < -1 < 0 \end{cases}$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

و بما أنها محدودة من الأسفل $(-2 < u_n)$ فهي متقاربة.

2-المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثمّ حساب حدّها الأول :لدينا

$$v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{22u_n+8}{-4u_n+1}+1}{\dfrac{11u_n+4}{-4u_n+1}+2} = \frac{\dfrac{22u_n+8-4u_n+1}{\cancel{-4u_n+1}}}{\dfrac{11u_n+4+2\left(-4u_n+1\right)}{\cancel{-4u_n+1}}}$$
$$= \frac{18u_n+9}{3u_n+6} = \frac{9}{3} \times \frac{2u_n+1}{u_n+2} = 3v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 3$ و حدّها الأول $v_0 = \dfrac{2u_0+1}{u_0+2} = \dfrac{2\left(\frac{-3}{2}\right)+1}{\frac{-3}{2}+2} = \dfrac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \dfrac{3}{2+4\times 3^n} - 2$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -4 \times 3^n$

و من جهة لدينا

$$v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} = \frac{2u_n+1+3-3}{u_n+2} = \frac{2u_n+4-3}{u_n+2}$$
$$= \frac{2\left(u_n+2\right)}{u_n+2} - \frac{3}{u_n+2} = 2 - \frac{3}{u_n+2}$$

و بالتالي $\dfrac{3}{u_n+2} = 2 - v_n$ أي $u_n + 2 = \dfrac{3}{2-v_n}$ و منه

$$u_n = \frac{3}{2-v_n} - 2 = \frac{3}{2-\left(-4\times 3^n\right)} - 2 = \frac{3}{2+4\times 3^n} - 2$$

جـ) حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ لدينا: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2+4\times 3^n} - 2 = 0-2=-2$

3-

أ) التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{u_n+2}-2=-v_n$:

لدينا من السؤال السابق $\frac{3}{u_n+2} = 2-v_n$ و منه $\frac{3}{u_n+2}-2=-v_n$

ب) حساب S_n بدلالة n :

لدينا $\frac{3}{u_n+2}-2=-v_n=4\times 3^n$ و منه بالتعويض في المجموع نجد

$$\begin{aligned}S_n &= \ln\left(\frac{3}{u_0+2}-2\right)+\ln\left(\frac{3}{u_1+2}-2\right)+\cdots+\ln\left(\frac{3}{u_n+2}-2\right)\\ &= \ln\left(4\times 3^0\right)+\ln\left(4\times 3^1\right)+\cdots+\ln\left(4\times 3^n\right)=\ln\left[\left(4\times 3^0\right)\left(4\times 3^1\right)\cdots\left(4\times 3^n\right)\right]\\ &= \ln\left(4^{n+1}\times 3^{0+1+\cdots+n}\right)=\ln\left(4^{n+1}\right)+\ln 3^{\frac{n(n+1)}{2}}=(n+1)\ln 4+\frac{n(n+1)}{2}\ln 3\end{aligned}$$

حل التمرين 11

إضغط للعودة إلى التمرين

1-

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<2$:

نضع $P(n): 0<u_n<2$

- من أجل $n=0$ لدينا : $0<u_0<2$ أي $0<1<2$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n): 0<u_n<2$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1): 0<u_{n+1}<2$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0<u_n<2$ بتربيع الأطراف نجد $0<u_n^2<4$ تكافئ $0<\frac{1}{2}u_n^2<2$ تكافئ

$2<2+\frac{1}{2}u_n^2<4$ أي $0<\sqrt{2}<\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}<2$ إذن $0<u_{n+1}<2$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n): 0<u_{n+1}<2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج أنّها متقاربة :لدينا

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}-u_n=\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}-u_n\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n\right)}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}\right)^2-u_n^2}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n}=\frac{2-\frac{1}{2}u_n^2}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n}$$

المقام موجب تماما إذن يكفي دراسة إشارة البسط

لدينا من السؤال السابق $0<u_n<2$ تكافئ $0<\frac{1}{2}u_n^2<2$ أي $-2<-\frac{1}{2}u_n^2<0$

أي $0<2-\frac{1}{2}u_n^2<2$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

و بما أنها محدودة من الأعلى $(u_n<2)$ فهي متقاربة.

2-المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n^2-4$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حساب حدّها الأول :لدينا

$$v_{n+1}=u_{n+1}^2-4=\left(\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}\right)^2-4=2+\frac{1}{2}u_n^2-4=\frac{1}{2}u_n^2-2=\frac{1}{2}(u_n-4)=\frac{1}{2}v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدّها الأول $v_0=u_0^2-4=1^2-4=-3$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n=v_0\times q^n=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و من جهة لدينا $v_n=u_n^2-4$ أي $u_n^2=v_n+4$ إذن $|u_n|=\sqrt{v_n+4}$ و بما أن $u_n>0$ و منه

$$u_n=\sqrt{v_n+4}=\sqrt{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}=\sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

جـ) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\sqrt{4}=2$

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = \dfrac{n \times 2^{n+2}+3}{2^n} - 2$:

لدينا $u_n^2 = v_n + 4$ بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} S_n &= u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2 = v_0 + 4 + v_1 + 4 + \cdots + v_n + 4 \\ &= \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{n+1\text{مرة}} + \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{T_n} = 4(n+1) + T_n \end{aligned}$$

T_n هو مجموع متتالية هندسية و بالتالي

$$T_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -3 \times \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = -6\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

و منه

$$S_n = 4n + 4 - 6\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2^2n + 4 - 6 + \frac{3}{2^n} = 2^2n - 2 + \frac{3}{2^n} = \frac{2^{n+2}n+3}{2^n} - 2$$

ب) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD\left(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}\right) = PGCD\left(2^n; 3\right)$:

- تذكير: a و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $a \geq b$ ، r باقي قسمة a على b فإن

$$PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$$

لدينا $a = 3 + n \times 2^{n+2} = 4n \times 2^n + 3 = k \times b + r$ معناه 3 هو باقي قسمة $3 + n \times 2^{n+2}$ على 2^n و منه $PGCD\left(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}\right) = PGCD\left(2^n; 3\right)$

ج) استنتاج أنّ: $PGCD\left(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}\right) = 1$:

نضع $d = PGCD\left(2^n; 3\right)$ ، إذن $\begin{cases} d \mid 2^n \\ d \mid 3 \end{cases}$ و من أجل $n = 1$ فإن $\begin{cases} d \mid 2 \\ d \mid 3 \end{cases}$

و بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن $d \mid 1$ و منه

$$PGCD\left(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}\right) = PGCD\left(2^n; 3\right) = 1$$

د) إيجاد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $S_n = \dfrac{83}{8}$:

لدينا $S_n = \dfrac{83}{8}$ أي $\dfrac{2^{n+2}n+3}{2^n} = \dfrac{83}{8} + 2$ أي $4n + 3 \times 2^{-n} = \dfrac{99}{8}$ و منه $4n + 3 \times 2^{-n} - \dfrac{99}{8} = 0$

نضع $\frac{99}{8} - f(x) = 4x + 3 \times 2^{-x}$ نقوم بدراسة تغيرات f على المجال $[0; +\infty[$

• **حساب المشتقة :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 4 + 3 \times \left(2^{-x}\right)' = 4 + 3 \times \left(e^{-x\ln 2}\right)' = 4 - (3\ln 2)\, e^{-x\ln 2}$$

و منه $4 - (3\ln 2)\, e^{-x\ln 2} = 0$ أي $(3\ln 2)\, e^{-x\ln 2} = 4$ أي $e^{-x\ln 2} = \frac{4}{3\ln 2}$

و بالتالي $-x\ln 2 = \ln\left(\frac{4}{3\ln 2}\right)$ و منه $x = -\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{4}{3\ln 2}\right) < 0$ إذن الدالة f رتيبة تماما على المجال $[0; +\infty[$ معناه يوجد عدد حقيقي x_0 على الأكثر حيث $f(x_0) = 0$ و بملاحظة أن $f(3) = 0$ فإن $S_n = \frac{83}{8}$ من أجل $n = 3$.

حل التمرين 12

إضغط للعودة إلى التمرين

1-

أ) دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$ على المجال $[0; +\infty[$، لدينا :

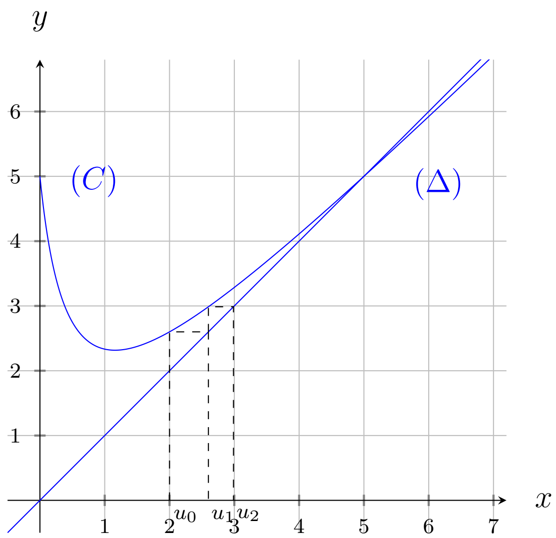
$$f(x) - y = \frac{2x^2+5}{2x+1} - x = \frac{2x^2+5-x(2x+1)}{2x+1} = \frac{5-x}{2x+1}$$

لدينا $x \in [0; +\infty[$ و منه: $2x+1 > 0$ على $[0; +\infty[$، و منه إشارة الفرق من إشارة $5 - x$

و الجدول الآتي يلخص اشارة الفرق و وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ) :

x	0		5		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C) فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) تحت (Δ)	

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 و وضع تخمين حول اتجاه تغيّر (u_n) :



المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C) و (Δ) .

2-

أ) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \leq u_n < 5$:

نضع $P(n) : 2 \leq u_n < 5$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $2 \leq u_0 < 5$ أي $2 \leq 2 < 5$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n) : 2 \leq u_n < 5$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1) : 2 \leq u_{n+1} < 5$ صحيحة .

لدينا من الفرض $2 \leq u_n < 5$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2; 5[$

فإن $f(2) \leq f(u_n) < f(5)$ أي $2 \leq \frac{13}{5} \leq u_{n+1} < 5$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n) : 2 \leq u_n < 5$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتاج أنها متقاربة :

لدينا $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ و حسب السؤال الأول فإن $f(x) - x > 0$ على المجال $[2; 5[$ و بما أن $2 \leq u_n < 5$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و بما أنها محدودة من الأعلى $(u_n < 5)$ فهي متقاربة.

3-إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $5 - u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}(5 - u_n)$:لدينا

$$5 - u_{n+1} = 5 - \frac{2u_n^2 + 5}{2u_n + 1} = \frac{5(2u_n + 1) - (2u_n^2 + 5)}{2u_n + 1}$$
$$= \frac{5 \times 2u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{2u_n(5 - u_n)}{2u_n + 1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}(5 - u_n)$$

4-

أ) <u>تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{2u_n}{2u_n+1} \leq \frac{10}{11}$</u>: لدينا

$$\frac{2u_n}{2u_n+1} - \frac{10}{11} = \frac{11\left(2u_n\right) - 10\left(2u_n+1\right)}{11\left(2u_n+1\right)} = \frac{22u_n - 20u_n - 10}{11\left(2u_n+1\right)}$$
$$= \frac{2u_n - 10}{11\left(2u_n+1\right)} = \frac{2\left(u_n-5\right)}{11\left(2u_n+1\right)} = \frac{2}{11} \times \frac{u_n-5}{2u_n+1}$$

و بما أن $2 \leq u_n < 5$ فإن $\begin{cases} u_n - 5 < 0 \\ 2u_n + 1 > 0 \end{cases}$ و منه $\frac{2u_n}{2u_n+1} - \frac{10}{11} = \frac{2}{11}\frac{u_n-5}{2u_n+1} \leq 0$

و بالتالي $\frac{2u_n}{2u_n+1} \leq \frac{10}{11}$

ب) <u>استنتاج أنّ $0 < 5 - u_n \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$ ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$</u> :

نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $Q(n) : 0 < 5 - u_n \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $0 < 5 - u_0 \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^0$ أي $0 < 5 - 2 \leq 3$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

- نفرض أن $Q(n) : 0 < 5 - u_n \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$ صحيحة، و نثبت أن $Q(n+1) : 0 < 5 - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}$ صحيحة .

لدينا من الفرض $0 < 5 - u_n \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$ بضرب أطراف المتراجحة بالعدد $\frac{10}{11}$ نجد

$0 < \frac{10}{11}\left(5 - u_n\right) \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}$ و لدينا مما سبق $5 - u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}\left(5 - u_n\right)$

و لدينا $\frac{2u_n}{2u_n+1} \leq \frac{10}{11}$ بضرب طرفي المتراجحة بالعدد $5 - u_n > 0$ نجد

$\frac{2u_n}{2u_n+1}\left(5 - u_n\right) \leq \frac{10}{11}\left(5 - u_n\right)$

معناه $5 - u_{n+1} \leq \frac{10}{11}\left(5 - u_n\right)$ و منه $0 < 5 - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}$

ومنه $Q(n+1)$ صحيحة. إذن: $Q(n) : 0 < 5 - u_n \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

حل التمرين 13

إضغط للعودة إلى التمرين

1- تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=-\frac{1}{3}(v_n)^2$:لدينا

$$v_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^2+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}u_n^2+\frac{2}{3}u_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(u_n^2-2u_n+1\right)$$
$$=-\frac{1}{3}(u_n-1)^2=-\frac{1}{3}(v_n)^2$$

2-برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-3\leq v_n<0$:

نضع $P(n):-3\leq v_n<0$

- من أجل $n=0$ لدينا : $-3\leq v_0<0$ أي $-3\leq -1<0$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $P(n):-3\leq v_n<0$ صحيحة، و نثبت أن $P(n+1):-3\leq v_{n+1}<0$ صحيحة .

لدينا من الفرض $-3\leq v_n<0$ تكافئ $0<(v_n)^2\leq 9$ أي $-3\leq -\frac{1}{3}(v_n)^2<0$ أي $-3\leq v_{n+1}<0$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. إذن : $P(n):-3\leq v_n<0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3-دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) ثمّ استنتاج أن (v_n) متقاربة :لدينا

$$v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}(v_n)^2-v_n=-\frac{1}{3}v_n\left(v_n+3\right)$$

و بما أن $-3\leq v_n<0$ فإن $v_n+3\geq 0$ إذن $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}v_n\left(v_n+3\right)\geq 0$ و منه المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و بما أنها محدودة من الأعلى $(v_n<0)$ فهي متقاربة.

4-(w_n) المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n=\ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)$

أ) تبيان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 و حساب حدها الأول w_0 :لدينا

$$w_{n+1}=\ln\left(-\frac{3}{v_{n+1}}\right)=\ln\left(-\frac{3}{-\frac{1}{3}(v_n)^2}\right)=\ln\left(\frac{3^2}{v_n^2}\right)=\ln\left(\frac{3}{v_n}\right)^2$$
$$=\ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)^2=2\ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)=2w_n$$

لاحظ أن $\left(\frac{3}{v_n}\right)^2=\left(-\frac{3}{v_n}\right)^2$

و منه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول $w_0=\ln\left(-\frac{3}{v_0}\right)=\ln\left(-\frac{3}{-1}\right)=\ln 3$

ب) كتابة w_n بدلالة n، ثم استنتاج v_n و u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

(w_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $w_n = w_0 \times q^n = \ln 3 \times 2^n = 2^n \times \ln 3 = \ln 3^{2^n}$

و لدينا من جهة $w_n = \ln\left(-\dfrac{3}{v_n}\right)$ أي $e^{w_n} = -\dfrac{3}{v_n}$ و منه

$$v_n = -\frac{3}{e^{w_n}} = -\frac{3}{e^{\ln 3^{2^n}}} = -\frac{3}{3^{2^n}} = -\frac{1}{3^{2^n-1}}$$

و لدينا من جهة أخرى $v_n = u_n - 1$ و منه $u_n = v_n + 1 = -\dfrac{1}{3^{2^n-1}} + 1$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{3^{2^n-1}} + 1 = 0 + 1 = 1$

5- حساب بدلالة n الجداء P_n:

لدينا $v_n = -\dfrac{1}{3^{2^n-1}}$ أي $\dfrac{1}{v_n} = -3^{2^n-1}$ بالتعويض في الجداء نجد

$$P_n = \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{v_1} \times \cdots \times \frac{1}{v_n} = \left(-3^{2^0-1}\right)\left(-3^{2^1-1}\right)\cdots\left(-3^{2^n-1}\right)$$

$$= (-1)^{n+1} \times 3^{2^0-1+2^1-1+\cdots+2^n-1} = (-1)^{n+1} \times 3^{\underbrace{2^0+2^1+\cdots+2^n}_{S_n} - \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n+1\,\text{مرة}}} = (-1)^{n+1} \times 3^{S_n-(n+1)}$$

S_n متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول 1 إذن

$$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

و منه

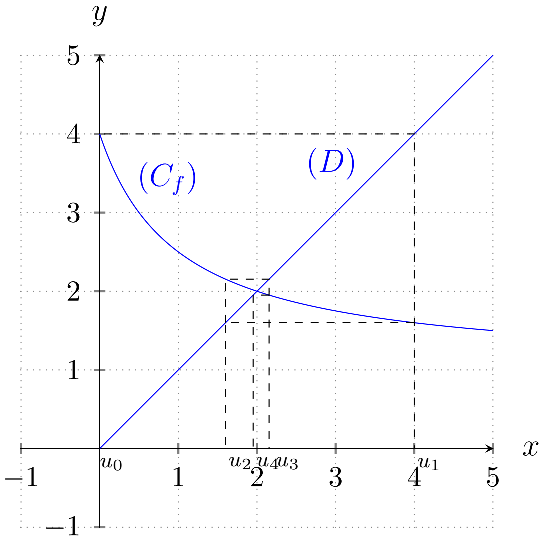
$$P_n = (-1)^{n+1} \times 3^{S_n-(n+1)} = (-1)^{n+1} \times 3^{2^{n+1}-1-(n+1)} = (-1)^{n+1} \times 3^{2^{n+1}-n-2}$$

إضغط للعودة إلى التمرين

حل التمرين 14

1-

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :



ب) تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها :

المتتالية (u_n) ليست رتيبة و هي تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D) $(x = 2)$.

2-(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ و تعيين حدها الأول v_0 :لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{u_n + 4}{u_n + 1} - 2}{\dfrac{u_n + 4}{u_n + 1} + 2} = \frac{\dfrac{u_n + 4 - 2u_n - 2}{u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 4 + 2u_n + 2}{u_n + 1}}$$

$$= \frac{-u_n + 2}{3u_n + 6} = \frac{-(u_n - 2)}{3(u_n + 2)}$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\dfrac{1}{3}$ و حدها الأول : $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = -1$

ب) تعيين عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n :

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

و لدينا من جهة

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2 - 2 - 2}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2 - 4}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2}{u_n + 2} - \frac{4}{u_n + 2} = 1 - \frac{4}{u_n + 2}$$

أي $v_n = 1 - \dfrac{4}{u_n + 2}$ تكافئ $v_n - 1 = -\dfrac{4}{u_n + 2}$ تكافئ $u_n + 2 = -\dfrac{4}{v_n - 1}$ و منه

$$u_n = -2 - \frac{4}{v_n - 1} = -2 - \frac{4}{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1} = -2 + \frac{4}{\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1}$$

ج) حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

بما أن $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ و منه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(-2 + \frac{4}{\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1}\right) = -2 + 4 = 2$$

3-حساب S_n بدلالة n ثمّ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = \frac{1}{16}\left[4n + 7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = -\left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}\right]$$

$$= -\frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

و لدينا مما سبق $v_n - 1 = -\frac{4}{u_n + 2}$ أي $\frac{1}{u_n + 2} = -\frac{v_n - 1}{4}$ و منه بالتعويض في المجموع T_n

$$T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \cdots + \frac{1}{u_n + 2} = -\frac{v_0 - 1}{4} - \frac{v_1 - 1}{4} - \cdots - \frac{v_n - 1}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}(v_0 - 1 + v_1 - 1 + \cdots + v_n - 1) = -\frac{1}{4}\left[v_0 + v_1 + \cdots + v_n - \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1 \text{ مرة}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[S_n - (n+1)\right] = -\frac{1}{4}\left[-\frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - (n+1)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-\frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] - (n+1)\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left[-3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] - \frac{4n+4}{4}\right]$$

$$= -\frac{1}{16}\left(-3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 4n - 4\right) = -\frac{1}{16}\left(-7 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 4n\right) = \frac{1}{16}\left(4n + 7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

حل التمرين 15

إضغط للعودة إلى التمرين

1-أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

2-(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 9u_n - 16n + 6$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4u_n - 8n + 2$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 9 و تعيين حدها الأول v_0: لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4u_{n+1} - 8(n+1) + 2 = 4(9u_n - 16n + 6) - 8n - 8 + 2 \\ &= 36u_n - 64n + 24 - 8n - 6 = 36u_n - 72n + 18 = 9(4u_n - 8n + 2) = 9v_n \end{aligned}$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 9$ و حدها الأول $v_0 = 4u_0 - 8 \times 0 + 2 = 4 \times \frac{3}{2} + 2 = 8$

ب) تعيين عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2 \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي عبارتها هي $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 9^n$

و لدينا $v_n = 4u_n - 8n + 2$ أي $4u_n = v_n + 8n - 2$ و منه

$$u_n = \frac{v_n + 8n - 2}{4} = \frac{8 \times 9^n + 8n - 2}{4} = 2 \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$$

3- حساب S_n بدلالة n ثم استنتاج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = \frac{1}{4}(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3)$:

(v_n) متتالية هندسية و بالتالي

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 8 \times \frac{1 - 9^{n+1}}{1 - 9} = 8 \times \frac{1 - 9^{n+1}}{-8} = 9^{n+1} - 1$$

و لدينا $u_n = \frac{v_n + 8n - 2}{4}$ بالتعويض في المجموع T_n نجد

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{v_0 + 8 \times 0 - 2}{4} + \frac{v_1 + 8 \times 1 - 2}{4} + \cdots + \frac{v_n + 8n - 2}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left[\underbrace{(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)}_{S_n} + 8\underbrace{(0 + 1 + \cdots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} - 2\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1 \text{ مرة}}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[9^{n+1} - 1 + 8 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1)\right] = \frac{1}{4}\left[9^{n+1} - 1 + 4n(n+1) - 2(n+1)\right] \\ &= \frac{1}{4}(9^{n+1} - 1 + 4n^2 + 4n - 2n - 2) = \frac{1}{4}(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3) \end{aligned}$$

4-أنظر كتاب البحار في الأعداد و الحساب [إضغط هنا لتحميل الكتاب]

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحيمِ
وَأَنفِقوا مِن ما رَزَقناكُم مِن قَبلِ أَن يَأتِيَ أَحَدَكُمُ المَوتُ فَيَقولَ رَبِّ لَولا أَخَّرتَني إِلىٰ أَجَلٍ قَريبٍ فَأَصَّدَّقَ وَأَكُن مِنَ الصّالِحينَ ﴿١٠﴾
"سورة المنافقون"

❂ الحمد لله الذي وفقنا لإتمام هذا الكتاب ❂