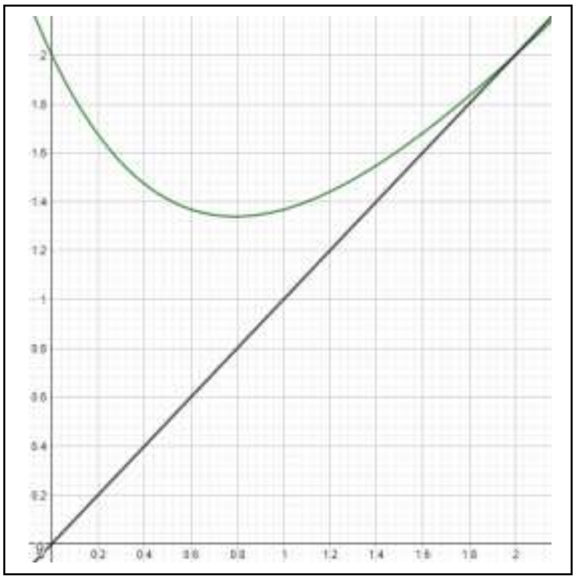
وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية غليزان

ثانوية محمد الحسين بن زيان – وادي الجمعة - — السنة الدراسية 2025/2024

فرض الثلاثي الثاني

الشعبة: 3علوم تجريبية 1+3 — مادة الرياضيات — المدة: ساعة



عالج تمرين من التمرينين

التمرين الأول :

1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=(2-x)e^{-x}+x$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1,+\infty[$.

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(2-u_n)e^{-u_n}+u_n$ ، .

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 2$.

ج) بين أن (u_n) متزايدة تماما .ماذا تستنتج ؟ أحسب نهايتها .

3) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<1-e^{-u_n}\le\dfrac{9}{10}$

ب)تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1}-2|\le\dfrac{9}{10}|u_n-2|$

ج)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-2|\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) نعتبر المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\le u_n\le 2+\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$.

ب)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2(n+1)-10\left(1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\le S_n\le 2(n+1)+10\left(1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$

ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$

التمرين الثاني : الأجزاء I II III منفصلة

I. (u_n) متتالية حسابية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $\begin{cases} \dfrac{e^{u_5}}{e^{u_2}} - 8 = 0 \\ u_1 + u_4 = \ln 288 \end{cases}$.

أ) عين u_0 و أساس r .

ب) عبر عن u_n بدلالة n.

II. نعتبر المتتالية (u_n) و (v_n) المتتالية المعرفتان على بـ: $v_n = \dfrac{u_n + \alpha}{2u_n - 1}$, $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$

جد قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$

III. اختر الاجابة الصحيحة من بين الاقتراحات المقدمة لكل سؤال:

1) المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: e^{3n+1}

أ) متتالية هندسية أساسها e^3 و $u_0 = 1$ **ب)** متتالية حسابية أساسها e^3 و $u_0 = e$ **ج)** متتالية هندسية أساسها e^3 و $u_0 = e$

2) المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $\ln(2\times 5^n)$

أ) متتالية هندسية أساسها $\ln(5)$ و $u_0 = \ln 2$ **ب)** متتالية حسابية أساسها $\ln(5)$ و $u_0 = \ln 2$ **ج)** متتالية حسابية أساسها $\ln(5)$ و $u_0 = 2$

3) المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = -\dfrac{1}{2n+4}$ و $v_n = \dfrac{1}{n+1}$

أ) متناقصتان **ب)** متزايدتان **ج)** متجاورتان

4) المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 7$ إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ، فإن نهايتها لما n يؤول إلى $+\infty$ هي

أ) 7 **ب)** 14 **ج)** $+\infty$

5) متتالية هندسية معرفة بحدها العام $u_n = -2\times 3^n$ المجموع $S_n = -2\left(1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}\right)$

أ) $S_n = 1 - 3^{n+1}$ **ب)** $S_n = \dfrac{1-3^{n+1}}{2}$ **ج)** $S_n = 1 - 3^n$

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية غليزان

ثانوية محمد الحسين بن زيان – وادي الجمعة - — السنة الدراسية2025/2024

الحل النموذجي لفرض الثلاثي الثاني

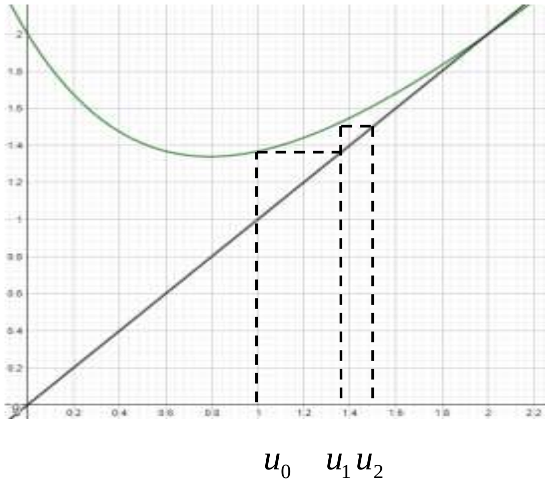
الشعبة:3علوم تجريبية 3+1 — مادةالرياضيات — الأستاذة : جلام

الأجابة	التنقيط
التمرين الأول :	**20**

1. إتجاه تغير الدالة f على المجال $]1,+\infty[$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ — **01**

2. (u_n) متتالية حيث: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}=f(u_n)$



أ / تمثيل الحدود u_0 , u_1 و u_2 على محور الفواصل :

لدينا : $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,u_1)$

نسقط M_0 على (Δ) وفق (ox) , ثم نسقط النقطة المحصل

عليها على (C) وفق (oy) فنحصل على M_1

وهكذا نكرر نفس العملية فنحصل على M_2 — **01.5**

التخمين : بما أن $u_0<u_1<u_2$ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة — **01**

ب) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 2$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $1\le u_n\le 2$

❶ من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=2$ و $2>1$ ومنه $p(0)$ صحيحة .

❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $1\le u_n\le 2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 2$

لدينا $1\le u_n\le 2$ ومنه $f(1)\le f(u)_n\le f(2)$ حسب السؤال(1-)لأن f متزايدة تماما أي $1\le u_{n+1}\le 2$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة — **02**

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

جـ . تبيان أن (u_n) متزايدة تماما

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-u_n=(2-u_n)e^{-u_n}+u_n-u_n=(2-u_n)e^{-u_n}$

- ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1\le u_n\le 2$ وبالتالي $0\le 2-u_n$

ومنه $(2-u_n)e^{-u_n}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما . — **02**

/ استنتاج:

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 2 فإن (u_n) متقاربة — **01**

حساب نهايتها :

بما أن (u_n) متقاربة فإن من أجل كبير بقدر الكافي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$

أي أن $\ell=(2-\ell)e^{-\ell}+\ell$ ومنه $(2-\ell)e^{-\ell}=0$ ومنه $\ell=2$ لأن $e^{-\ell}\neq 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ — **01**

3. أ. اثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ - $0<1-e^{-u_n}\le\frac{9}{10}$

لدينا $1\le u_n\le 2$ ومنه $-2\le -u_n\le -1$ ومنه $e^{-2}\le e^{-u_n}\le e^{-1}$ ومنه $0<1-e^{-1}\le 1-e^{-u_n}\le 1-e^{-2}\le\frac{9}{10}$ إذن $0<1-e^{-u_n}\le\frac{9}{10}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n>1$ وبالتالي $\frac{1}{u_n}<1$ ومنه $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{2}$ ومنه $\frac{u_n-1}{2u_n}<\frac{1}{2}(u_n-1)$ إذن $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$ — **01**

ب)تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1}-2|\le \frac{9}{10}|u_n-2|$

02

$|u_{n+1}-2| = \left|(2-u_n)e^{-u_n}+u_n-2\right| = |u_n-2|\left|1-e^{-u_n}\right| = |u_n-2|\left(1-e^{-u_n}\right)$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0<1-e^{-u_n}\le\frac{9}{10}$ ومنه $0<|u_n-2|\left(1-e^{-u_n}\right)\le\frac{9}{10}|u_n-2|$ إذن $|u_{n+1}-2|\le\frac{9}{10}|u_n-2|$

ج) تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $|u_n-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $|u_n-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$

02

❶ من أجل $n=0$ لدينا : $|u_0-2|=|-1|=1$ و $|u_0-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^0$

ومنه $p(0)$ صحيحة .

❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $|u_n-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $|u_{n+1}-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$

لدينا (3.ب) $|u_{n+1}-2|\le\frac{9}{10}|u_n-2|$ ومن الفرض التراجع لدينا $|u_n-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ فإن $|u_{n+1}-2|\le\frac{9}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$ أي

$|u_{n+1}-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

01

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =1$:

لدينا $|u_n-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ بماأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-2=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

---

4. نعتبر المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-\left(\frac{9}{10}\right)^n\le u_n\le 2+\left(\frac{9}{10}\right)^n$.

01

من السؤال(3. ج) لدينا $|u_n-2|\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ومنه $-\left(\frac{9}{10}\right)^n\le u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ إذن $2-\left(\frac{9}{10}\right)^n\le u_n\le 2+\left(\frac{9}{10}\right)^n$

ب)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2(n+1)-10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\le S_n\le 2(n+1)+10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$

02.5

لدينا $2-\left(\frac{9}{10}\right)^n\le u_n\le 2+\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ومنه $2(n+1)-\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{9}{10}}\le S_n\le 2(n+1)+\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{9}{10}}$ أي

$2(n+1)-\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{\frac{1}{10}}\le S_n\le 2(n+1)+\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{\frac{1}{10}}$ إذن $2(n+1)-10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\le S_n\le 2(n+1)+10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$

ج) استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

01

لدينا $2(n+1)-10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\le S_n\le 2(n+1)+10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$ ومنه $2\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{10}{n}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\le\frac{S_n}{n}\le 2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{10}{n}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{10}{n}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\right)=2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{10}{n}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\right)=2$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=2$

20 — **التمرين الثاني** : الأجزاء I II III منفصلة

04.5

I. (u_n) متتالية حسابية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $\begin{cases} \dfrac{e^{u_5}}{e^{u_2}} - 8 = 0 \\ u_1 + u_4 = \ln 288 \end{cases}$.

أ)عين u_0 و أساس r .

بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن $u_n = u_0 + nr$ و منه $u_1 = u_0 + r$ ، $u_2 = u_0 + 2r$ ، $u_4 = u_0 + 4r$ ، $u_5 = u_0 + 5r$

$$\begin{cases} \dfrac{e^{u_5}}{e^{u_2}} - 8 = 0 \\ u_1 + u_4 = \ln 288 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} \dfrac{e^{u_0+5r}}{e^{u_0+2r}} - 8 = 0 \\ u_0 + r + u_0 + 4r = \ln 288 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} e^{3r} = 8 \;...(1) \\ 2u_0 + 5r = \ln 288 ...(2) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) نجد $3r = \ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$ ومنه $r = \ln 2$ بتعويض في المعادلة (1) نجد $u_0 = \ln 5$

ب)عبر عن u_n بدلالة n.

بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن $u_n = u_0 + nr$ و منه $u_n = \ln 5 + n\ln 2 = \ln 5 + \ln 2^n = \ln(5 \times 2^n)$ إذن $u_n = \ln(5 \times 2^n)$

03

II. نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n + \alpha}{2u_n - 1}$ ، $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$

حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ فإن $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n = \frac{1}{2} \times \frac{u_n + \alpha}{2u_n - 1}$ ...(1) ومن جهة

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + \alpha}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} + \alpha}{2\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \frac{\frac{(3+2\alpha)u_n - 1}{2u_n}}{\frac{4u_n - 2}{2u_n}} = \frac{1}{2} \times \frac{(3+2\alpha)u_n - 1}{2u_n - 1}$$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{(3+2\alpha)u_n - 1}{2u_n - 1}$ ...(2)

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد $\alpha = -1$

02.5

III. اختيار الاجابة الصحيحة من بين الاقتراحات المقدمة لكل سؤال:

1) المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : e^{3n+1}

الجواب هو (ج)

التبرير : $u_{n+1} = e^{3(n+1)+1} = e^{3n+4} = e^3 e^{3n+1} = e^3 u_n$ إذن : متتالية هندسية أساسها e^3 و $u_0 = e$

02.5

2) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\ln(2 \times 5^n)$

الجواب هو (ب)

التبرير :

$u_{n+1} = \ln(2 \times 5^{n+1}) = \ln(2 \times 5^n \times 5)$

$= \ln(2 \times 5^n) + \ln 5 = u_n + \ln(5)$

إذن : متتالية حسابية أساسها $\ln(5)$ و $u_0 = \ln 2$

02.5

3) المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = -\dfrac{1}{2n+4}$ و $v_n = \dfrac{1}{n+1}$

الجواب هو (ج)

التبرير :

نضع $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[1, +\infty[$ بـ : $f(x) = -\dfrac{1}{2x+4}$

	f دالة قابلة للاشتقاق على $[1,+\infty[$ و f' دالتها المشتقة المعرفة بـ : $f'(x)=-\frac{-2}{(2x+4)^2}=\frac{2}{(2x+4)^2}>0$ ومنه f دالة متزايدة تماما على $[1,+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما من أجل كل عدد طبيعي n . و نضع $v_n=g(n)$ حيث g دالة معرفة على $[1,+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x+1}$ g دالة قابلة للاشتقاق على $[1,+\infty[$ و g' دالتها المشتقة المعرفة بـ : $g'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}<0$ ومنه g دالة متناقصة تماما على $[1,+\infty[$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة تماما من أجل كل عدد طبيعي n . ولدينا أيضا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n+4}-\frac{1}{n+1}\right)=0$
02.5	**4)** المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$ إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ، فإن نهايتها لما n يؤول إلى $+\infty$ هي الجواب (ب) التبرير : بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ أي أن $\frac{1}{2}\ell+7=\ell$ ومنه $\ell=14$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=14$
02.5	**5)** متتالية هندسية معرفة بحدها العام $u_n=-2\times3^n$ المجموع $S_n=-2\left(1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right)$ الجواب (أ) التبرير : $S_n=-2\left(1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right)$ $=-2\left(1+e^{\ln 3}+e^{\ln 3^2}+...+e^{\ln 3^n}\right)$ $=-2+(-2\times3)+(-2\times3^2)+...+(-2\times3^n)$ $=-2\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=1-3^{n+1}$