



موضوع البكالوريا التجريبي رقم 02

التمرين الأول:

قسم للثالثة تقني رياضي به 18 تلميذا موزعين كما يلي: 6 تلاميذ هندسة كهربائية منهم 4 ذكور، 5 تلاميذ هندسة ميكانيكية منهم 3 ذكور، 4 تلاميذ هندسة مدنية كلهم ذكور و 3 تلاميذ هندسة طرائق كلهم إناث.

I- يراد تشكيل لجنة من 4 تلاميذ من هذا القسم بطريقة عشوائية.

(1) احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

B : "اللجنة من نفس الجنس"

A : "اللجنة من نفس التخصص"

D : "اللجنة تضم جميع تلاميذ هندسة الطرائق"

C : "اللجنة من جميع التخصصات"

(2) بين أن $p(A \cap B) = \frac{1}{1530}$ ثم استنتج احتمال أن تضم اللجنة تلميذا من نفس التخصص أو من نفس الجنس.

II- نختار الآن وبطريقة عشوائية تلميذين من هذا القسم أحدهما رئيسا والآخر نائبا.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار للجنة عدد تلاميذ الهندسة الكهربائية بها.

(1) برر أن قيم المتغير العشوائي X الممكنة هي $\{0;1;2\}$ ثم عرف قانون احتماله.

(2) أ- احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

ب- عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون $E(2025X + \alpha) = 2024$

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحده الأول $u_0 = 2 + \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{(2 + \alpha)u_n}{u_n + 2 - \alpha}$

حيث $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2\}$

ولتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2\alpha}$

I- نفرض أن $\alpha = 1$

(1) أ- تحقق أن $u_{n+1} = 3 - \frac{3}{u_n + 1}$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n < 4$

ج- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{6}{3 - 3^{-n}}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم عين أصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n \geq e^{66}$

ج- احسب بدلالة n المجموع $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

II- نفرض أن $-2 < \alpha < 0$

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2+\alpha}{2-\alpha}$ ثم اكتب v_n بدلالة n و α

(2) بين أن $0 < \frac{2+\alpha}{2-\alpha} < 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) واحسب نهايتها.

(3) احسب بدلالة n و α المجموع $S_n' = \ln[(2-\alpha)v_0] + \ln[(2-\alpha)^2 v_1] + \dots + \ln[(2-\alpha)^n v_{n-1}]$

التمرين الثالث:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C لواحقها $z_A = 1+i, z_B = \sqrt{3}-i, z_C = 4$ على الترتيب.

(1) اكتب z_A, z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسّي.

(2) اكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على شكله الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

(3) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1-i\sqrt{3})$ ثم احسب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$

(4) أ- أوجد (Γ_1) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $z = z_C + 2e^{i\theta}$ لما تتغير θ في \mathbb{R}

ب- أوجد (Γ_2) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $\arg(z - z_C) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الرابع:

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $10,1 < \alpha < 10,2$

(3) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]1; +\infty[$ ثم استنتج إشارة $g(x^2)$ حسب قيم x من $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(1) أ- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ ، $f(x) + f(-x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ وفسر النتائج بيانيا.

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

ب- جد حصر لـ $f(\sqrt{\alpha})$ ثم استنتج حصر لـ $f(-\sqrt{\alpha})$

(4) أنشئ (C_f) (وحدة الطول $2cm$)

III- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(e^x)$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

دون تعيين عبارة الدالة h

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ وفسر النتيجةين بيانياً.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- عين إحداثيي نقطة تقاطع (C_h) مع حامل محور الفواصل ثم بين أن المماس (T) لـ (C_h) عند هذه النقطة

$$y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2} \ln 2$$

ب- أنشئ (T) و (C_h) في نفس المعلم السابق.

(4) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $\ln(e^{2x} - 1) - 2\sqrt{2}xe^x = me^x$

انتهى الموضوع

التمرين الخامس: (خاص بشعبي رياضي / تقني رياضي)

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة $(E) \quad 14x - 5y = 26 \dots$

(1) أ- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن y زوجي.

ب- عين الحل الخاص $(a; a+2)$ للمعادلة (E) ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E)

(2) أ- إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) ، عين مجموعة القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$

ب- عين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x; y) = 13$

(3) أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 13 للعدد A حيث $A = 1445^{2024} + 2974^{1444} + 2024^{1962}$

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9n \times 2024^{2n+1} - 1445^{4n+4} \equiv (n-1)9^{2n+2} [13]$

ثم عين مجموعة قيم n التي من أجلها يكون $9n \times 2024^{2n+1} - 1445^{4n+4}$ مضاعفاً لـ 13

(4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{1\delta\gamma 5}$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $\overline{2\beta\alpha 5}$ في النظام ذي الأساس 8

عين α و β ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي N في النظام العشري علماً أن $\gamma = \beta + 1$ و $\delta = 2\alpha$

(5) M عدد طبيعي يكتب $\overline{5m21}$ في النظام ذي الأساس $n-1$ ويكتب $\overline{2mnn}$ في النظام ذي الأساس $n+1$

عين n و m ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي M في النظام العشري.